MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. HERGLOTZ
A. E. INGHAM H. KNESER O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

57. BAND 2. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 27. JANUAR 1953)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1953

Math. Z.

Die

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Zürich/Schweiz, Hadlaubstraße 45,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,
H. Wielandt, Tübingen, Biesingerstraße 7.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

Vertriebsvertretung des Verlages im Ausland:

Lange, Maxwell & Springer Ltd., 41—45 Neal Street, London W.C.2.

---

57. Band **Inhalt** 2. Heft

Seite

Ackermann, W., Widerspruchsfreier Aufbau einer typenfreien Logik. II. 155

Buchholz, H., Die Lösungen einer besonderen Whittakerschen inhomogenen Differentialgleichung 167

Rund, H., The Theory of Subspaces of a Finsler Space. II. 193

Stoll, W., Ganze Funktionen endlicher Ordnung mit gegebenen Nullstellenflächen 211

Kneser, M., Bemerkung über die Primpolynomzerlegung in endlich vielen Schritten 238

Lorenzen, P., Eine Bemerkung über die Abzählbarkeitsvoraussetzung in der Algebra 241

Leichtweiss, K., Natürliche Gleichungen einer Fläche 244

Ackermann, W.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 155—166 (1953)

Widerspruchsfreier Aufbau einer typenfreien Logik. II.

Von
Wilhelm Ackermann.

In einer vorhergehenden Arbeit mit dem gleichen Haupttitel[1]) habe ich ein Axiomensystem für eine typenfreie Logik aufgestellt und den zugehörigen Widerspruchsfreiheitsbeweis gegeben. In dem vorliegenden zweiten Teil sollen die ersten Ableitungen aus dem Axiomensystem erfolgen, die die Gewinnung der Mathematik betreffen. Dabei wird hier noch nicht das genannte Axiomensystem voll verwendet, sondern nur ein Teilsystem, das von der Implikation keinen Gebrauch macht. Auf die frühere Arbeit wird in einigen Punkten, z.B. was den Beweis der Widerspruchsfreiheit anbetrifft, verwiesen; im allgemeinen ist ihre Kenntnis nicht wesentlich.

§ 1. Ein vereinfachtes Axiomensystem.

Das im ersten Teil aufgestellte Axiomensystem, das wir mit $\sum$ bezeichnen wollen, enthält die Aussageverknüpfungen &, $\vee$, $-$, $\rightarrow$. Für die Ableitung eines wesentlichen Teiles der Mathematik ist nun ein Ausschnitt aus dem System ausreichend, der die Verknüpfung $\rightarrow$ nicht enthält. Da die Axiome in § 2 von Teil I aber sämtlich unter Verwendung von $\rightarrow$ formuliert sind, ist es am einfachsten, wenn wir uns zur Beschreibung dieses Ausschnitts der zweiten, in § 3 von Teil I angegebenen Form des Axiomensystems bedienen. Ein vereinfachtes System entsteht daraus, indem wir die Ableitungsschemata und die Grundformeln, die $\rightarrow$ enthalten, fortlassen. Die Widerspruchsfreiheit ist also auch jetzt gewährleistet. Damit ist das System schon beschrieben; wir wollen die Grundformeln und Schemata unten zusammenstellen. Die Begriffe „Formel" und „Term" sind die gleichen wie früher; nur werden die Formeln und Terme, die $\rightarrow$ enthalten, fortgelassen.

I. Grundformeln.

Als Grundformeln haben wir zunächst solche der Form $\varphi\, \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n$ und $\overline{\varphi\, \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{c}_n}$, wobei die $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ keine freie Variable enthalten. Hierbei ist φ ein n-stelliges spezielles Prädikatzeichen. Es gehört dazu eine effektive Einteilung aller n-tupel $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{c}_n$ von konstanten Termen in eine von zwei Klassen, wobei aber die Terme, die sich nur durch die Benennung der gebundenen Variablen unterscheiden, immer gleich behandelt werden müssen. $\varphi\, \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n$ ist Grundformel, falls $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ zur ersten Klasse gehört, sonst ist $\overline{\varphi\, \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n}$ Grundformel.

[1]) Ackermann, W.: Widerspruchsfreier Aufbau einer typenfreien Logik. (Erweitertes System.) Math. Z. **55**, 364—384 (1952).

II. Ableitungsregeln.

$A_I \cdot \dfrac{\Psi}{\Psi, \mathfrak{A}}$ $\quad A_{II} \cdot \dfrac{\Psi, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}}{\Psi, \mathfrak{A}}$ $\quad A_{III} \cdot \dfrac{\Psi, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \Theta}{\Psi, \mathfrak{B}, \mathfrak{A}, \Theta}$

$B_I \cdot \dfrac{\Psi, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}}{\Psi, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}$ $\quad B_{II} \cdot \dfrac{\Psi, \mathfrak{A} \quad \Psi, \mathfrak{B}}{\Psi, \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}$ $\quad B_{III} \cdot \dfrac{\Psi, \mathfrak{A}}{\Psi, \overline{\overline{\mathfrak{A}}}}$

$B_{IV} \cdot \dfrac{\Psi, \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}}}{\Psi, \overline{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}}$ $\quad B_V \cdot \dfrac{\Psi, \overline{\mathfrak{A}} \quad \Psi, \overline{\mathfrak{B}}}{\Psi, \overline{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}}$ $\quad B_{VI} \cdot \dfrac{\Psi, \mathfrak{A}(\mathfrak{a})}{\Psi, (Ex)\,\mathfrak{A}(x)}$

$B_{VII} \cdot \dfrac{\Psi, \mathfrak{A}(a)}{\Psi, (x)\,\mathfrak{A}(x)}$ $\quad B_{VIII} \cdot \dfrac{\Psi, \overline{\mathfrak{A}(a)}}{\Psi, \overline{(Ex)\,\mathfrak{A}(x)}}$ $\quad B_{IX} \cdot \dfrac{\Psi, \overline{\mathfrak{A}(\mathfrak{a})}}{\Psi, \overline{(x)\,\mathfrak{A}(x)}}$

$B_X \cdot \dfrac{\Psi, \mathfrak{A}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)}{\Psi, \{\hat{x}_1 \ldots \hat{x}_n \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)\}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)}$ $\quad B_{XI} \cdot \dfrac{\Psi, \overline{\mathfrak{A}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)}}{\Psi, \overline{\{\hat{x}_1 \ldots \hat{x}_n \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)\}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)}}$

$B_{XII} \cdot \dfrac{\Psi, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}{\Psi, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}}$ $\quad B_{XIII} \cdot \dfrac{\Psi, \mathfrak{A} \quad \Psi, \overline{\mathfrak{A}}}{\Psi}$

Mit jedem Schema kann auch eine Umbenennung der gebundenen Variablen verbunden werden. Für die nähere Erläuterung der Schemata vgl. § 3 von Teil I. Die Anzahl der Schemata kann auch vermindert werden, indem man in bekannter Weise „und" durch „oder" und „(x)" durch „(Ex)" definiert oder umgekehrt.

III. Weitere Grundformeln.

Weitere Grundformeln erhalten wir in der folgenden Weise: Es sei $\mathfrak{A}(a)$ eine Formel, die die freie Variable a enthält. Für jeden konstanten Term $\mathfrak{a}$ lasse sich eine Herleitung für $\mathfrak{A}(\mathfrak{a})$ aus den Grundformeln I mit Hilfe der obigen Schemata effektiv angeben. Dann dürfen wir $\mathfrak{A}(a)$ als weitere Grundformel hinzufügen, wobei wir statt der Variablen a ebensogut eine andere freie Variable nehmen können. Weiter dürfen wir auch Grundformeln $\mathfrak{A}(a)$ hinzufügen, falls bei der Ableitung von $\mathfrak{A}(\mathfrak{a})$ auch Grundformeln der ebengenannten Art benutzt wurden, usw.

In dieser allgemeinen Weise ist aber die Bildung der Grundformeln III nur dann gestattet, falls die Schemata B_X und B_{XI} nicht zur Ableitung der Formeln $\mathfrak{A}(\mathfrak{a})$ benutzt werden. Ist das der Fall, so muß die Bildung der Grundformeln III eine gewisse Einschränkung erfahren. Wir müssen dann wie in Teil I erläutert wurde, den Begriff des Rangs einer Formel verwenden. Grundformeln I haben den Rang 1. Bei den Ableitungsschemata ist, abgesehen von B_X und B_{XI}, der Rang einer Formel der Konklusion so wie der Rang der ihr entsprechenden Formel in der Prämisse, bzw. gleich dem größten Rang, der unter den ihr entsprechenden Formeln in den Prämissen vorkommt. Für B_X und B_{XI} gilt die gleiche Regel für Formeln der Reihe Ψ, während beim Übergang von $\mathfrak{A}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ zu $\{\hat{x}_1 \ldots \hat{x}_n \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)\}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ oder von $\overline{\mathfrak{A}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)}$ zu $\overline{\{\hat{x}_1 \ldots \hat{x}_n \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)\}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)}$ der Rang sich um eins erhöht. Die nach obiger Art gewonnenen Grundformeln III sind nun als solche nur dann zulässig, wenn der Rang sämtlicher Formeln $\mathfrak{A}(\mathfrak{a})$ bei den

zugehörigen Herleitungen eine bestimmte Rangzahl nicht übersteigt. Die größte Rangzahl von $\mathfrak{A}(a)$, die bei einer Herleitung für $\mathfrak{A}(a)$ vorkommt, heißt dann der Rang der betreffenden Grundformel III.

Wir wollen dieses einfache Axiomensystem mit Λ bezeichnen. Handelt es sich nur darum, einen Widerspruchsfreiheitsbeweis für Λ zu geben, so kann der in Teil I gegebene Widerspruchsfreiheitsbeweis natürlich wesentlich vereinfacht werden, da dann einfach alle Überlegungen, die Implikationsformeln betreffen — und das macht den Hauptumfang des Beweises aus — weggelassen werden können.

Das System Λ erlaubt kein volles Operieren mit den Formeln nach den Regeln des Prädikatenkalküls, da der Satz vom ausgeschlossenen Dritten nicht in voller Allgemeinheit vorhanden ist. Es hat aber die folgende Eigenschaft: Für die Theorie irgendeines Wissensgebietes seien uns die mit den Mitteln des engeren Prädikatenkalküls ausdrückbaren spezifischen Axiome gegeben. Diese Axiome seien sämtlich von der ersten Stufe, sollen also keine Prädikatvariable enthalten. In diesen Axiomen kommen verschiedene individuelle Grundprädikate (ein- oder mehrstellige) vor. Wir behaupten dann, alle Sätze der Theorie, die wir mit Hilfe des engeren Prädikatenkalküls aus den Axiomen ableiten können (es stehen nur Sätze in Frage, die ebenfalls nur die individuellen Grundprädikate, aber keine variablen Prädikate enthalten), können auch in unserem System Λ abgeleitet werden, falls wir zu den spezifischen Axiomen der Theorie noch weitere Axiome hinzufügen, die die Gültigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten für jedes Grundprädikat ausdrücken, also Axiome der Form $\varphi\, a \vee \overline{\varphi\, a}$, $\psi\, a\, b \vee \overline{\psi\, a\, b}$, usw.

Es genügt zu zeigen, daß für alle Formeln $\mathfrak{A}$ ohne Prädikatvariable sich $\mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{A}}$ beweisen läßt. Denn dann haben wir in unserem System, so weit die Formeln ohne freie Prädikatvariable in Frage kommen, die Möglichkeit, jeden Schluß der Prädikatenlogik auszuführen[2]). $\mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{A}}$ läßt sich aber für die obigen Formeln durch Induktion nach dem Formelaufbau beweisen. Man erhält nämlich aus $\mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{A}}$ nach B_{XII}, A_{III}, B_{III} und B_I $\overline{\mathfrak{A}} \vee \overline{\overline{\mathfrak{A}}}$. Aus $\mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{A}}$ und $\mathfrak{B} \vee \overline{\mathfrak{B}}$ erhält man ferner nach B_{XII} $\mathfrak{A}$, $\overline{\mathfrak{A}}$ und $\mathfrak{B}$, $\overline{\mathfrak{B}}$, nach A_I und A_{III} $\mathfrak{A}$, $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$ und $\mathfrak{B}$, $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$, nach B_{IV} und A_{III} $\overline{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}$, $\mathfrak{A}$ und $\overline{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}$, $\mathfrak{B}$ und nach B_{II}, A_{III}, B_I $(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}) \vee \overline{(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B})}$. Ähnlich erhält man aus $\mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{A}}$ und $\mathfrak{B} \vee \overline{\mathfrak{B}}$ auch $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \vee \overline{(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})}$. Ferner erhalten wir aus $\mathfrak{A}(a) \vee \overline{\mathfrak{A}(a)}$ nach B_{XII} $\mathfrak{A}(a)$, $\overline{\mathfrak{A}(a)}$, nach B_{IX} $\mathfrak{A}(a)$, $\overline{(x)\,\mathfrak{A}(x)}$, nach A_{III} und B_{VII} $\overline{(x)\,\mathfrak{A}(x)}$, $(x)\,\mathfrak{A}(x)$, nach A_{III} und B_I $(x)\,\mathfrak{A}(x) \vee \overline{(x)\,\mathfrak{A}(x)}$. Ebenso erhält man aus $\mathfrak{A}(a)$, $\overline{\mathfrak{A}(a)}$ nach A_{III} und B_{VI} $\overline{\mathfrak{A}(a)}$, $(Ex)\,\mathfrak{A}(x)$, nach A_{III} und B_{VIII} $(Ex)\,\mathfrak{A}(x)$, $\overline{(Ex)\,\mathfrak{A}(x)}$ und nach B_I $(Ex)\,\mathfrak{A}(x) \vee \overline{(Ex)\,\mathfrak{A}(x)}$.

Da der Kalkül Λ zusammen mit dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten alle Schlüsse des Prädikatenkalküls enthält, läßt sich auch die Richtigkeit der folgenden Behauptung einsehen: Es sei eine Klasse von Formeln gegeben, so daß für jede Formel der Klasse der Satz vom ausgeschlossenen Dritten in

[2]) Vgl. z. B. Schütte, K.: Schlußweisenkalküle der Prädikatenlogik. Math. Ann. **122**, 47—65 (1950).

Δ beweisbar ist. Gewisse Formeln dieser Klasse seien Axiome. Alle Formeln der obigen Klasse, die sich aus den genannten Axiomen nach den Regeln der gewöhnlichen Prädikatenlogik ableiten lassen und zwar so, daß der Beweis wieder nur Formeln der Klasse enthält, lassen sich auch im System Δ gewinnen.

Die gleichen Behauptungen, die wir eben für das System Δ formulierten, gelten natürlich auch für unser gesamtes Axiomensystem $\sum$, da die Schemata von Δ zu in $\sum$ beweisbaren Regeln werden, wenn wir bei den Formelreihen die Kommata durch Disjunktionszeichen ersetzen und etwa nach links hin klammern.

§ 2. Ableitung der Zahlentheorie.

Für den Aufbau der Zahlentheorie brauchen wir die folgenden Grundprädikate: ζa (a ist eine Zahl), $a \underset{\zeta}{=} b$ (a und b sind die gleichen Zahlen), $\alpha a b c$ (c entsteht aus a und b durch Addition), $\mu \alpha b c$ (c entsteht aus a und b durch Multiplikation), ferner einen Term 0, eine Termfunktion, die jedem Term $\mathfrak{a}$ einen anderen $\mathfrak{a}'$ zuordnet. Man kommt mit den folgenden Axiomen aus (vgl. HILBERT-BERNAYS, Grundlagen der Mathematik I, S. 371 und 465):

1. $\zeta 0$
2. $\overline{\zeta a} \vee \zeta a'$
3. $a \underset{\zeta}{=} a$
4. $\overline{a \underset{\zeta}{=} b} \vee \overline{\mathfrak{A}(a)} \vee \mathfrak{A}(b)$
5. $\overline{a' \underset{\zeta}{=} 0}$
6. $\overline{a' \underset{\zeta}{=} b'} \vee a \underset{\zeta}{=} b$
7. $\overline{\alpha a b c} \vee \overline{\alpha a b d} \vee c \underset{\zeta}{=} d$
8. $\alpha a 0 a$
9. $\overline{\alpha a b c} \vee \alpha a b' c'$
10. $\overline{\mu a b c} \vee \overline{\mu a b d} \vee c \underset{\zeta}{=} d$
11. $\overline{\zeta a} \vee \mu a 0 0$
12. $\overline{\mu a b c} \vee \overline{\alpha c a d} \vee \mu a b' d$
13. $\overline{\mathfrak{A}(0)} \vee (Ex)\,(\mathfrak{A}(x) \,\&\, \zeta x \,\&\, \overline{\mathfrak{A}(x')}) \vee \overline{\zeta a} \vee \mathfrak{A}(a)$.

Wir müssen also die obigen Grundprädikate so in Δ definieren, daß diese Axiome beweisbar sind. Bei 4. und 13. ist es dabei nicht erforderlich, daß diese Formeln für beliebige $\mathfrak{A}$ beweisbar sind, sondern es genügt, wenn das für die Formeln $\mathfrak{A}$ zutrifft, deren Formelaufbau induktiv gemäß den folgenden Regeln geschieht: a) $\mathfrak{a} \underset{\zeta}{=} \mathfrak{b}, \zeta\,\mathfrak{a}, \mu\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}, \alpha\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ sind für beliebige Terme Formeln; b) aus Formeln entstehen wieder Formeln durch die Aussageverknüpfungen und die Quantoren. — Um alle Sätze der Zahlentheorie zu gewinnen, ist es ferner nach den Bemerkungen des vorigen Abschnitts nötig, die Formeln

$$a \underset{\zeta}{=} b \vee \overline{a \underset{\zeta}{=} b}, \quad \zeta a \vee \overline{\zeta a}, \quad \alpha a b c \vee \overline{\alpha a b c}, \quad \mu a b c \vee \overline{\mu a b c}$$

zu beweisen. Die Definition der Grundprädikate geschieht folgendermaßen: Wir führen zunächst das Zeichen $\equiv$ ein, wie schon in § 2 des ersten Teiles. Die Grundformeln für $\equiv$ spielen hier übrigens keine Rolle. o sei nun eine Abkürzung für den Term $\hat{x}\, x \equiv x$, $\mathfrak{a}'$ eine solche für $\hat{\mathfrak{v}}\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{v})$. Die Terme o, o', o'', ... und die daraus durch Umbenennung der gebundenen Variablen entstehenden Terme sollen Zahlzeichen heißen. (Bemerkung: Es ist hierbei

nicht an eine mengentheoretische Erklärung der Zahlen gedacht. Wir nehmen vielmehr, und das reicht für unsere Zwecke vollkommen aus, als Repräsentanten der Zahlen irgendeine abzählbare Reihe von Symbolen.) Als Mitteilungszeichen für die Zahlzeichen verwenden wir $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots$. Die Definition für $=_\zeta$ sieht nun so aus: Für konstante $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ist $=_\zeta \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ Grundformel, falls $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bis auf eine verschiedene Benennung der gebundenen Variablen formal die gleiche Gestalt haben und beide Zahlzeichen sind, während sonst $\overline{=_\zeta \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}}$ Grundformel ist. Statt $=_\zeta \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ schreiben wir gewöhnlich $\mathfrak{a} =_\zeta \mathfrak{b}$. ζ, α, μ werden so definiert: Für einen konstanten Term $\mathfrak{a}$ ist $\zeta\,\mathfrak{a}$ Grundformel, falls $\mathfrak{a}$ ein Zahlzeichen ist, sonst ist $\overline{\zeta\,\mathfrak{a}}$ Grundformel. $\alpha\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ ist, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ als konstante Terme vorausgesetzt, Grundformel, falls $\mathfrak{b}$ ein Zahlzeichen ist und $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{a}$ dadurch entsteht, daß die Striche von $\mathfrak{b}$ an $\mathfrak{a}$ angehängt werden, im übrigen gilt $\overline{\alpha\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}}$. $\mu\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ ist Grundformel, falls $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ Zahlzeichen sind und $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ nach den Regeln der gewöhnlichen Arithmetik gilt, falls $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ durch die entsprechenden natürlichen Zahlen ersetzt werden; in allen anderen Fällen gilt $\overline{\mu\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}}$. Die Formeln, die den Satz vom ausgeschlossenen Dritten für die Grundprädikate ausdrücken, lassen sich nun sofort als Grundformeln II gewinnen (vgl. die in Teil I gegebene Ableitung von $a \equiv b \vee \overline{a \equiv b}$). Ferner lassen sich auch die zahlentheoretischen Axiome beweisen. (1) ist Grundformel I. Die Axiome (2) bis (12) sind leicht als Grundformeln II zu gewinnen. [Bei der Ableitung von (4) werden die Schemata B_X und B_{XI} nicht gebraucht.] Die Formeln (13) lassen sich zunächst beweisen, da man ja die Schlüsse des Prädikatenkalküls zur Verfügung hat, falls für a ein bestimmtes Zahlzeichen $\mathfrak{z}$ gesetzt wird. Für andere konstante Terme, die für a eingesetzt werden, sind sie ebenfalls zu beweisen, da dann $\overline{\zeta\,\mathfrak{a}}$ Grundformel ist. Schemata B_X und B_{XI} werden dabei nicht gebraucht. Demnach gewinnt man (13) ebenfalls als Grundformeln II. Damit ist gezeigt, daß das System $\mathcal{A}$ zur Gewinnung der Zahlentheorie ausreicht.

§ 3. Die verzweigte Prädikatenlogik.

Sind uns in $\mathcal{A}$ gewisse individuelle Grundprädikte gegeben, für die sich der Satz vom ausgeschlossenen Dritten beweisen läßt, so lassen sich im Bereiche der Formeln, die man mit diesen Grundprädikaten aufbauen kann, alle Schlüsse der Prädikatenlogik ausführen, wie wir es schon in § 1 darlegten. Es gilt aber mehr. Wir zeigen, daß das System $\mathcal{A}$ uns auch ermöglicht, über dem gegebenen Grundbereich eine verzweigte Prädikatenlogik aufzubauen. — Wir wollen im folgenden eine verzweigte Logik über der Zahlentheorie aufbauen; man erkennt aber an den Ausführungen, daß die spezielle Wahl des Grundbereichs nicht wesentlich ist, sondern daß der Aufbau in der gleichen Weise über jedem anderen Grundbereich geschehen kann.

Wir führen zunächst den folgenden verengten Formelbegriff ein. Formeln sollen nur durch endliche Anwendung der folgenden Regeln erhalten werden: (1) $\mathfrak{a} =_\zeta \mathfrak{b}, \zeta\,\mathfrak{a}, \alpha\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}, \mu\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ sind für beliebige Terme Formeln; (2) aus Formeln

entstehen wieder Formeln durch die Aussageverknüpfungen und die Quantoren. Dabei sind $\underset{\zeta}{=}$, ζ, α, μ in der gleichen Weise definiert wie in § 2. Wir wollen die Formeln dieser Art zum Unterschied von weiter unten definierten *Formeln erster Art* nennen. Für die Formeln erster Art gilt der Satz vom ausgeschlossenen Dritten, wie schon in § 2 gezeigt wurde. Wir bemerken ferner, daß wir für jede Formel von Δ effektiv feststellen können, ob es sich um eine Formel erster Art handelt oder nicht. Als Abkürzung für Formeln erster Art verwenden wir $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ usw. Wir führen nun spezielle Prädikate τ_n^1 ein. $\tau_n^1 \mathfrak{a}$ soll für einen konstanten Term $\mathfrak{a}$ Grundformel sein, wenn $\mathfrak{a}$ die Form $\hat{\mathfrak{v}}_1 \ldots \hat{\mathfrak{v}}_n \mathfrak{A}_1(\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n)$ hat; sonst soll $\overline{\tau_n^1 \mathfrak{a}}$ gelten. Offenbar läßt sich $\tau_n^1 a \vee \overline{\tau_n^1 a}$ beweisen, da dies eine Grundformel II ist. Ferner lassen sich die Formeln $\overline{\tau_n^1 a} \vee a\, b_1 \ldots b_n \vee \overline{a\, b_1 \ldots b_n}$ beweisen. Diese sind nämlich ebenfalls als Grundformeln II mit Hilfe der Schemata B_X und B_{XI} in der erlaubten Weise zu gewinnen, da für die Formeln erster Art der Satz vom ausgeschlossenen Dritten beweisbar ist.

Wir definieren weiter Formeln *zweiter Art* und wollen wieder die Definition so gestalten, daß für jede Formel effektiv feststellbar ist, ob es sich um eine Formel zweiter Art handelt oder nicht. Zunächst erklären wir einen weiteren Formelbegriff, aus dem sich die Formeln zweiter Art durch eine besondere Eigenschaft herausheben.

(1) $\mathfrak{a} \underset{\zeta}{=} \mathfrak{b}$, $\zeta\, \mathfrak{a}$, $\alpha\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{b}\, \mathfrak{c}$, $\mu\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{b}\, \mathfrak{c}$, $\{\hat{\mathfrak{v}}_1 \ldots \hat{\mathfrak{v}}_n \mathfrak{A}_1(\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n)\}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$, $\tau_m^1 \hat{\mathfrak{v}}_1 \ldots \hat{\mathfrak{v}}_n \mathfrak{A}(\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n)$ sind Formeln; die in ihnen etwa vorkommenden freien Variablen heißen Variable der ersten Klasse;

(2) $\tau_n^1 a$, $\tau_n^1 b$, usw. sind Formeln, die in ihnen vorkommenden Variablen sind solche der ersten Klasse;

(3) $a\, \mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_n$, $b\, \mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_n$, usw. sind für beliebige Terme $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n$ Formeln. Die Variablen a, b, usw. heißen Variable der zweiten Klasse, etwa sonst vorkommende freie Variable solche der ersten Klasse.

(4) Mit $\mathfrak{A}$ ist $\overline{\mathfrak{A}}$ Formel, die Variablen behalten dabei ihren Charakter.

(5) Mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ Formeln. Freie Variable sind dabei von der ersten Klasse, falls sie in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von der ersten Klasse vorkommen. (In einer Formel fehlende Variable rechnen dabei zur ersten Klasse.) Sonst rechnen die freien Variablen zur zweiten Klasse. Eine Ausnahme bilden die Formeln $\tau_n^1 a \,\&\, \mathfrak{A}(a)$ und $\overline{\tau_n^1 a} \vee \mathfrak{A}(a)$ bezüglich der Variablen a (oder entsprechend für anders benannte Variable). Bei diesen rechnet die Variable a immer zur ersten Klasse.

(6) Ist $\mathfrak{A}(a)$ Formel, so sind $(Ex)\,(\tau_n^1 x \,\&\, \mathfrak{A}(x))$ und $(x)\,(\overline{\tau_n^1 x} \vee \mathfrak{A}(x))$ Formeln. Hier vorkommende freie Variable gehören zur gleichen Klasse wie in $\mathfrak{A}(a)$. (Selbstverständlich müssen alle Formeln so gebildet sein, daß sie überhaupt Formeln des Formalismus Δ darstellen.)

Die Formeln *zweiter Art* werden nun folgendermaßen definiert: Wir schließen zunächst die Formeln aus und verwenden sie auch nicht zum Aufbau anderer

Formeln, in denen eine Variable zweiter Klasse, z.B. a, gleichzeitig in der Form $a\,\mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_m$ und $a\,\mathfrak{c}_1 \ldots \mathfrak{c}_n$ $(m \neq n)$, oder auch gleichzeitig in der Form $a\,\mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_m$ und $\tau_n^1 a\,(m \neq n)$ auftritt. Jede in einer Formel vorkommende Variable zweiter Klasse hat danach eindeutig den Charakter eines einstelligen, zweistelligen usw. Prädikates. Unter den übrigbleibenden Formeln sind nun diejenigen zweiter Art, die keine freie Variable der zweiten Klasse enthalten.

Für die Formeln zweiter Art läßt sich der Satz vom ausgeschlossenen Dritten beweisen. Wir beweisen diesen Satz zusammen mit einem anderen, der allgemeiner die Formeln der obigen Definition betrifft, jedoch nur solche, bei denen eine Variable der zweiten Klasse eindeutig den Charakter eines Prädikates mit einer bestimmten Anzahl von Leerstellen hat. Die beiden Sätze heißen:

I. Für eine Formel $\mathfrak{A}$ ohne freie Variable der zweiten Klasse ist $\mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{A}}$ beweisbar. II. Für eine Formel $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_k)$ mit den einzigen Variablen zweiter Klasse $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ist $\overline{\tau_{n_1}^1 a_1} \vee \ldots \vee \overline{\tau_{n_k}^1 a_k} \vee \mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_k) \vee \overline{\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_k)}$ beweisbar, wenn die $a_1, \ldots, a_k$ in $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_k)$ als n_1-, $\ldots$, n_k-stellige Prädikate auftreten. — Die beiden Sätze werden durch simultane Induktion nach dem Formelaufbau bewiesen. — Für die Formeln (1) und (2) der obigen Definition kommt nur Satz I in Frage, der für diese Fälle schon früher bewiesen war, bzw. sich aus schon bewiesenen Sätzen sofort ergibt. Desgleichen war für die Formeln (3) Satz II schon bewiesen. Bei den Formeln, die nach (4) bis (6) gebildet sind, also die Form $\overline{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $(Ex)\,(\tau_n^1 x \,\&\, \mathfrak{A}(x))$, $(x)\,(\overline{\tau_n^1 x} \vee \mathfrak{A}(x))$ haben, gilt, falls Variable zweiter Klasse $a_1, \ldots, a_k$ vorkommen, nach Voraussetzung $\overline{\tau_{n_1}^1 a_1} \vee \ldots \vee \overline{\tau_{n_k}^1 a_k} \vee \mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{A}}$, bzw. außerdem $\overline{\tau_{n_1}^1 a_1} \vee \ldots \vee \overline{\tau_{n_k}^1 a_k} \vee \mathfrak{B} \vee \overline{\mathfrak{B}}$, bzw. $\overline{\tau_{n_1}^1 a_1} \vee \ldots \vee \overline{\tau_{n_k}^1 a_k} \vee \overline{\tau_m^1 b} \vee \mathfrak{A}(b) \vee \overline{\mathfrak{A}(b)}$, woraus sich leicht mit Hilfe der Regeln von A der Satz II für die neuen Formeln ergibt. Beim Falle (6) ist dabei zu benutzen, daß $\tau_m^1 b \vee \overline{\tau_m^1 b}$ beweisbar ist. Handelt es sich um Formeln ohne freie Variable der zweiten Klasse, so beweist sich Satz I entsprechend. Bei den nach (5) gebildeten Formeln der Form $\tau_n^1 a \,\&\, \mathfrak{A}(a)$ und $\overline{\tau_n^1 a} \vee \mathfrak{A}(a)$ und den nach (6) gebildeten Formeln ist dabei wieder $\tau_n^1 a \vee \overline{\tau_n^1 a}$ zu benutzen.

Nachdem wir den Satz vom ausgeschlossenen Dritten für Formeln zweiter Art (im folgenden mit $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2, \ldots$ bezeichnet) bewiesen haben, können wir weiter spezielle Prädikate τ_n^2 einführen. $\tau_n^2 \mathfrak{a}$ ist für konstante $\mathfrak{a}$ Grundformel, wenn $\mathfrak{a}$ die Form $\hat{\mathfrak{v}}_1 \ldots \hat{\mathfrak{v}}_n \mathfrak{A}_2(\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n)$ hat. Sonst ist $\overline{\tau_n^2 \mathfrak{a}}$ Grundformel. Es lassen sich dann wieder $\tau_n^2 a \vee \overline{\tau_n^2 a}$ und $\overline{\tau_n^2 a} \vee a\, b_1 \ldots b_n \vee \overline{a\, b_1 \ldots b_n}$ beweisen. Weiter können wir Formeln dritter Art einführen. Der Formelaufbau ist wie bei den Formeln zweiter Art, nur kommen bei (1) die folgenden Vorschriften hinzu: $\{\hat{\mathfrak{v}}_1 \ldots \hat{\mathfrak{v}}_n \mathfrak{A}_2(\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n)\}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ und $\tau_n^2 \hat{\mathfrak{v}}_1 \ldots \hat{\mathfrak{v}}_n \mathfrak{A}_2(\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n)$ sind Formeln, in denen nur Variable der ersten Klasse vorkommen. Bei (2) sind noch $\tau_n^2 a$, $\tau_n^2 b, \ldots$ Formeln, in denen nur Variable der ersten Klasse vorkommen. (5) und (6) sind entsprechend zu erweitern. Entsprechend gelangen wir zu Formeln höherer Art und zugehörigen Prädikaten τ_n^m.

Wir wollen ferner an einem Beispiel zeigen, daß das Axiom der Extensionalität in der Form, wie es in der verzweigten Logik auftritt, beweisbar ist. Wir bezeichnen zur Abkürzung den Ausdruck $(x)(\overline{a x} \vee b x \& a x \vee \overline{b x})$ mit $a \sim b$ und wollen die folgende Formel beweisen:

$$\overline{\tau_1^1 a} \vee \overline{\tau_1^1 b} \vee \overline{a \sim b} \vee \overline{\tau_2^1 c} \vee \overline{c a} \vee c b.$$

Wir können diese Formel als Grundformel II gewinnen, wenn wir sie für den Fall beweisen, daß für a, b, c konstante Terme $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ eingesetzt werden. Bei den $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ können wir uns auf solche Terme beschränken, für die $\tau_1^1 \mathfrak{a}$, $\tau_1^1 \mathfrak{b}$, $\tau_1^2 \mathfrak{c}$ beweisbar sind. Demnach haben wir nur zu zeigen, daß

$$\overline{\hat{x}\, \mathfrak{A}_1(x) \sim \hat{x}\, \mathfrak{B}_1(x)} \vee \{\overline{\hat{x}\, \mathfrak{C}_2(x)}\}\, (\hat{x}\, \mathfrak{A}_1(x)) \vee \{\hat{x}\, \mathfrak{C}_2(x)\}\, (\hat{x}\, \mathfrak{B}_1(x))$$

abgeleitet werden kann.

Der Beweis geschieht durch Induktion nach dem Formelaufbau von $\mathfrak{C}_2$. Da durch den Formelaufbau auch Formeln mit freien Variablen der zweiten Klasse entstehen, müssen wir ähnlich wie bei Satz I und II der vorigen Seite den Satz auch auf diese Formeln ausdehnen, die wir zur Abkürzung mit $\mathfrak{C}_2'$ bezeichnen. Wir zeigen also die Beweisbarkeit der Formeln

$$* \overline{\tau_{n_1}^1 a_1} \vee \ldots \vee \overline{\tau_{n_k}^1 a_k} \vee \overline{\hat{x}\, \mathfrak{A}_1(x) \sim \hat{x}\, \mathfrak{B}_1(x)} \vee \overline{\mathfrak{C}_2'(\hat{x}\, \mathfrak{A}_1(x))} \vee \mathfrak{C}_2' \hat{x}\, \mathfrak{B}_1(x),$$

wobei $a_1, \ldots, a_n$ die in $\mathfrak{C}_2'$ vorkommenden Variablen der zweiten Klasse sind. Der Fall, daß diese Variablen in $\mathfrak{C}_2'$ und in $*$ die Disjunktionsglieder $\overline{\tau_{n_i}^1 a_i}$ fehlen, soll eingeschlossen sein. $\hat{x}\, \mathfrak{A}_1(x)$ und $\hat{x}\, \mathfrak{B}_1(x)$ sind konstante Terme. Aus $*$ erhält man durch B_X und B_{XI} die obige zu beweisende Formel.

Wir bemerken zunächst, daß $\hat{x}\, \mathfrak{A}_1(x)$ und $\hat{x}\, \mathfrak{B}_1(x)$ keine Zahlzeichen sind, da sie ja eines der Zeichen $=_\zeta$, ζ, α, μ enthalten, die in Zahlzeichen nicht vorkommen. Hat daher $\mathfrak{C}_2'(\hat{x}\, \mathfrak{A}_1(x))$ und also auch $\mathfrak{C}_2'(\hat{x}\, \mathfrak{B}_1(x))$ eine der Formen $\zeta \mathfrak{d}$, $\mathfrak{d} =_\zeta \mathfrak{e}$, $\alpha \mathfrak{d} \mathfrak{e} \mathfrak{f} \mathfrak{g}$, $\mu \mathfrak{d} \mathfrak{e} \mathfrak{f} \mathfrak{g}$, so ist $*$ beweisbar, da $\overline{\mathfrak{C}_2'(\hat{x}\, \mathfrak{A}_1(x))}$ beweisbar ist. Das gilt auch für den Fall, daß $\mathfrak{C}_2'(\hat{x}\, \mathfrak{A}_1(x))$ und $\mathfrak{C}_2'(\hat{x}\, \mathfrak{B}_1(x))$ freie Variable enthalten. Weiter ist leicht einzusehen, daß die Beweisbarkeit der Formeln $*$ beim Aufbau der Formeln mit Hilfe der Zeichen $-$, &, $\vee$, (Ex), (x) erhalten bleibt. Demnach gilt also $*$ zunächst allgemein, falls $\mathfrak{C}_2'$ eine Formel erster Art ist, daher auch infolge B_X und B_{XI}, falls $\mathfrak{C}_2'(\hat{x}\, \mathfrak{A}_1(x))$ und $\mathfrak{C}_2'(\hat{x}\, \mathfrak{B}_1(x))$ die Form $\{\hat{\mathfrak{v}}_1 \ldots \hat{\mathfrak{v}}_n\, \mathfrak{A}_1(\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n)\}\, (\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ haben. Da $\tau_n^1 \hat{\mathfrak{v}}_1 \ldots \hat{\mathfrak{v}}_n\, \mathfrak{A}_1(\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n)$, bzw. $\overline{\tau_m^1 \hat{\mathfrak{v}}_1 \ldots \hat{\mathfrak{v}}_n\, \mathfrak{A}_1(\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n)}$ $(m \neq n)$ beweisbar ist, gilt die Behauptung für alle Formeln, die die in der Regel (1) beim Aufbau der Formeln zweiter Art genannte Gestalt haben. Weiter gilt sie für die Formeln der Gestalt (2), da entweder $\tau_n^1(\hat{x}\, \mathfrak{A}_1'(x))$ und $\tau_n^1(\hat{x}\, \mathfrak{B}_1(x))$ oder $\overline{\tau_n^1 \hat{x}\, \mathfrak{A}_1(x)}$ und $\overline{\tau_n^1 \hat{x}\, \mathfrak{B}_1(x)}$ beide beweisbar sind, je nachdem $n = 1$ oder $n \neq 1$. Hat $\mathfrak{C}_2'(\hat{x}\, \mathfrak{A}_1(x))$ die in (3) angegebene Gestalt, also die Form $a \mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_m$ und $\mathfrak{C}_2'(\hat{x}\, \mathfrak{B}_1(x))$ die entsprechende Gestalt $a \mathfrak{b}_1' \ldots \mathfrak{b}_m'$, so ist $\overline{\tau_n^1 a} \vee \overline{\hat{x}\, \mathfrak{A}_1(x) \sim \hat{x}\, \mathfrak{B}_1(x)} \vee a \mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_m \vee a \mathfrak{b}_1' \ldots \mathfrak{b}_m'$ als Grundformel II beweisbar. Denn die Formel braucht nur bewiesen zu werden,

falls für a ein Term $\hat{\mathfrak{v}}_1 \ldots \hat{\mathfrak{v}}_n \mathfrak{A}(\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n)$ eingesetzt wird. $\mathfrak{C}_2'$ hat dann aber eine schon vorher behandelte Gestalt. Ferner ist bei den Regeln (4) bis (6) leicht einzusehen und teilweise schon gezeigt, daß sie wieder zu Formeln $\mathfrak{C}_2'$ führen, für die die Behauptung stimmt.

Wir haben nun alle Mittel an der Hand, um eine verzweigte Prädikatenlogik aufzubauen. Diese, die an und für sich eine mehrsortige Theorie ist, kann im gewöhnlichen Prädikatenkalkül durch sortenbeschränkte Formeln wiedergegeben werden, und zwar kann jeder Beweis der verzweigten Logik so wiedergegeben werden, daß er nur sortenbeschränkte Formeln benutzt[3]). Nun haben wir in den τ_n^m gerade die nötigen Sortenprädikate zur Verfügung. Ein Beweis für eine Formel n. Art kann so geführt werden, daß er nur Formeln n. Art benutzt. Da aber für Formeln n. Art der Satz vom ausgeschlossenen Dritten gilt, ist unser System A imstande, alle Schlußweisen der verzweigten Logik wiederzugeben. Die spezifischen Axiome der mehrsortigen Theorie, als welche Extensionalitätsaxiom und Komprehensionsaxiom zu rechnen wären, sind beweisbar. Die wiedergegebene verzweigte Logik ist eine solche, die nur den Begriff der Ordnung, aber nicht den der Stufe kennt.

§4. Einführung der rationalen und der reellen Zahlen.

Wir wollen die rationalen Zahlen nicht mit Hilfe irgendwelcher zahlentheoretischen Relationen einführen, sondern durch ein direktes Repräsentantensystem. Wir gehen dabei ähnlich vor wie bei der Einführung der natürlichen (bzw. nichtnegativen) ganzen Zahlen. Hier repräsentierten $\hat{x}(x = x)$, $\hat{y}(\{\hat{x}(x = x)\}(y))$, usw. diese Zahlen, wobei die Benennung der gebundenen Variablen gleichgültig war. Ebenso hätten wir auch irgendeine andere abzählbare Reihe von konstanten Termen zur Repräsentation wählen können. In gleicher Weise können wir die rationalen Zahlen durch irgendeine Termreihe repräsentieren, bei der jeder Term eine eineindeutige Beziehung zu einem geordneten Paar von gewöhnlichen Zahlen hat. Wir gehen demnach folgendermaßen vor: $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots$ mögen wieder irgendwelche nichtnegative ganze Zahlen, d.h. genauer die Terme, die diese Zahlen bei uns repräsentieren, bedeuten. Wir führen nun ein spezielles Prädikat ϱ („ist eine rationale Zahl") ein. Für einen konstanten Term $\mathfrak{a}$ ist $\varrho\,\mathfrak{a}$ Grundformel, wenn $\mathfrak{a}$ die Gestalt $\hat{\mathfrak{v}}(\mathfrak{v} = \mathfrak{z}_1 \,\&\, \mathfrak{v} = \mathfrak{z}_2)$, aber $\mathfrak{z}_2$ nicht die Form $\hat{\mathfrak{v}}(\mathfrak{v} = \mathfrak{v})$ hat, oder wenn $\mathfrak{a}$ die Gestalt $\hat{\mathfrak{v}}(\mathfrak{v} = \mathfrak{z}_1 \vee \mathfrak{v} = \mathfrak{z}_2)$ hat, aber weder $\mathfrak{z}_1$ noch $\mathfrak{z}_2$ die Form $\hat{\mathfrak{v}}(\mathfrak{v} = \mathfrak{v})$ haben; für andere konstante Terme ist $\overline{\varrho\,\mathfrak{a}}$ Grundformel. Für die Terme $\hat{\mathfrak{v}}(\mathfrak{v} = \mathfrak{z}_1 \,\&\, \mathfrak{v} = \mathfrak{z}_2)$ bzw. $\hat{\mathfrak{v}}(\mathfrak{v} = \mathfrak{z}_1 \vee \mathfrak{v} = \mathfrak{z}_2)$ gebrauchen wir im folgenden, so weit sie die Eigenschaft ϱ haben, die Abkürzungen $\mathfrak{p}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2)$ bzw. $\mathfrak{n}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2)$. Mit 0_ϱ bezeichnen wir den Term $\mathfrak{p}(0, 0')$, mit 1_ϱ den Term $\mathfrak{p}(0', 0')$. Weitere spezielle Prädikate, die wir

[3]) Vgl. hierüber und über die äquivalente Wiedergabe von mehrsortigen Theorien durch sortenbeschränkte Formeln in der üblichen Prädikatenlogik A. Schmidt, Die Zulässigkeit der Behandlung mehrsortiger Theorien mittels der üblichen einsortigen Prädikatenlogik [Math. Ann. **123**, 187—200 (1951)]. — Die dort verlangte Bedingung, daß zu jeder Sorte ein passendes Individuum existiert, ist hier erfüllt.

einführen, sind $\mathfrak{a} \underset{\varrho}{=} \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \underset{\varrho}{<} \mathfrak{b}$, $\alpha_\varrho\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{b}\, \mathfrak{c}$, $\mu_\varrho\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{b}\, \mathfrak{c}$. Bei diesen Prädikaten sind für konstante Terme die folgenden Formeln Grundformeln:

(1) $\mathfrak{p}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2) \underset{\varrho}{=} \mathfrak{p}(\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4)$ und $\mathfrak{n}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2) \underset{\varrho}{=} \mathfrak{n}(\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4)$

falls $\mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_4 = \mathfrak{z}_2 \cdot \mathfrak{z}_3$. Das letzte ist hier so zu verstehen, daß die Beziehung im Sinne der gewöhnlichen Arithmetik richtig ist, falls $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_4$ durch die Zahlen, die sie repräsentieren, ersetzt werden. Entsprechend sind die Angaben bei den folgenden Grundformeln zu verstehen.

(2) $\mathfrak{n}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2) \underset{\varrho}{<} \mathfrak{p}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2)$; $\mathfrak{p}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2) \underset{\varrho}{<} \mathfrak{p}(\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4)$, falls $\mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_4 < \mathfrak{z}_2 \cdot \mathfrak{z}_3$.

$\mathfrak{n}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2) \underset{\varrho}{<} \mathfrak{n}(\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4)$, falls $\mathfrak{z}_2 \cdot \mathfrak{z}_3 < \mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_4$.

(3) $\alpha_\varrho(\mathfrak{p}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2), \mathfrak{p}(\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4), \mathfrak{p}(\mathfrak{z}_5, \mathfrak{z}_6))$ und $\alpha_\varrho(\mathfrak{n}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2), \mathfrak{n}(\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4), \mathfrak{n}(\mathfrak{z}_5, \mathfrak{z}_6))$

falls $\mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_4 \cdot \mathfrak{z}_6 + \mathfrak{z}_2 \cdot \mathfrak{z}_3 \cdot \mathfrak{z}_6 = \mathfrak{z}_2 \cdot \mathfrak{z}_4 \cdot \mathfrak{z}_5$; $\alpha_\varrho(\mathfrak{p}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2), \mathfrak{n}(\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4), \mathfrak{p}(\mathfrak{z}_5, \mathfrak{z}_6))$

und $\alpha_\varrho(\mathfrak{n}(\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4), \mathfrak{p}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2), \mathfrak{p}(\mathfrak{z}_5, \mathfrak{z}_6))$, falls $\mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_4 \cdot \mathfrak{z}_6 = \mathfrak{z}_2\, \mathfrak{z}_3\, \mathfrak{z}_6 + \mathfrak{z}_2\, \mathfrak{z}_4\, \mathfrak{z}_5$.

$\alpha_\varrho(\mathfrak{p}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2), \mathfrak{n}(\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4), \mathfrak{n}(\mathfrak{z}_5, \mathfrak{z}_6))$ und $\alpha_\varrho(\mathfrak{n}(\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4), \mathfrak{p}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2), \mathfrak{n}(\mathfrak{z}_5, \mathfrak{z}_6))$,

falls $\mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_4 \cdot \mathfrak{z}_6 + \mathfrak{z}_2 \cdot \mathfrak{z}_4 \cdot \mathfrak{z}_5 = \mathfrak{z}_2 \cdot \mathfrak{z}_3 \cdot \mathfrak{z}_6$.

(4) $\mu_\varrho(\mathfrak{p}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2), \mathfrak{p}(\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4), \mathfrak{p}(\mathfrak{z}_5, \mathfrak{z}_6))$ und $\mu_\varrho(\mathfrak{n}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2), \mathfrak{n}(\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4), \mathfrak{p}(\mathfrak{z}_5, \mathfrak{z}_6))$

und $\mu_\varrho(\mathfrak{p}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2), \mathfrak{n}(\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4), \mathfrak{n}(\mathfrak{z}_5, \mathfrak{z}_6))$ und $\mu_\varrho(\mathfrak{n}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2), \mathfrak{p}(\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4), \mathfrak{n}(\mathfrak{z}_5, \mathfrak{z}_6))$,

falls $\mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_3 \cdot \mathfrak{z}_6 = \mathfrak{z}_2 \cdot \mathfrak{z}_4 \cdot \mathfrak{z}_5$.

In allen anderen Fällen sind für konstante $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ $\overline{\mathfrak{a} \underset{\varrho}{=} \mathfrak{b}}$, $\overline{\mathfrak{a} \underset{\varrho}{<} \mathfrak{b}}$, $\overline{\alpha_\varrho\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{b}\, \mathfrak{c}}$, $\overline{\mu_\varrho\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{b}\, \mathfrak{c}}$ Grundformeln. Es lassen sich dann leicht die Formeln $a \underset{\varrho}{=} b \vee \overline{a \underset{\varrho}{=} b}$, $a \underset{\varrho}{<} b \vee \overline{a \underset{\varrho}{<} b}$, $\alpha_\varrho\, a\, b\, c \vee \overline{\alpha_\varrho\, a\, b\, c}$, $\mu_\varrho\, a\, b\, c \vee \overline{\mu_\varrho\, a\, b\, c}$ als Grundformeln II gewinnen, in der gleichen Weise auch alle Axiome für die Theorie der rationalen Zahlen, z. B. die Sätze über die Kommutativität, Assoziativität von Multiplikation und Addition, die über die Transitivität von $\underset{\varrho}{=}$ und $\underset{\varrho}{<}$ usw. Wir brauchen das nicht im einzelnen auszuführen. Die betreffenden Formeln sind für konstante Terme, die für die Variablen eingesetzt werden, unmittelbar aus den Grundformeln für $\underset{\varrho}{=}$, $\underset{\varrho}{<}$, α_ϱ, μ_ϱ zu beweisen, so daß sich die Formeln mit Variablen als Grundformeln II gewinnen lassen, in der gleichen Weise, wie wir schon die zahlentheoretischen Axiome erhielten.

Es darf uns hierbei nicht stutzig machen, daß z. B. die beiden Brüche $\mathfrak{z}_1/\mathfrak{z}_2$ und $\mathfrak{z}_2/\mathfrak{z}_1$ durch die beiden Terme $\hat{x}(x \underset{\varrho}{=} \mathfrak{z}_1 \,\&\, x \equiv \mathfrak{z}_2)$ und $\hat{x}(x \equiv \mathfrak{z}_2 \,\&\, x \equiv \mathfrak{z}_1)$ wiedergegeben werden, die doch inhaltlich die gleiche Bedeutung haben. Die beiden Terme treten bei unserem Aufbau der Rationalzahlen als zwei verschiedene Zeichengruppen und als sonst nichts auf. Für die beiden Terme läßt sich die Verschiedenheit im Sinne von $\neq$, wie im Sinne von $\underset{\varrho}{=}$ beweisen. Unser System ist also nicht extensional. Unsere Einführung der Rational-

zahlen, ebenso wie der natürlichen Zahlen, hat metamathematischen Charakter. Allerdings ist die benötigte Metalogik in dem Formalismus selbst enthalten.

Über dem Grundbereich der Rationalzahlen läßt sich nun eine verzweigte Prädikatenlogik aufbauen. Wir brauchen diese hier nicht im einzelnen zu entwickeln. Sie wird genau so aufgebaut wie die verzweigte Logik über der Zahlentheorie, die wir in § 3 beschrieben. An die Stelle der Grundprädikate $a \leqq b$, ζa, $\varkappa a b c$, $\mu a b c$ in § 3 treten hier die Grundprädikate $a \underset{\varrho}{\leqq} b$, ϱa, $a \underset{\varrho}{<} b$, $\varkappa_\varrho a b c$, $\mu_\varrho a b c$. Die Prädikate τ_n^m haben jetzt natürlich eine andere Bedeutung und müßten, wenn sie mit den früheren τ_n^m zugleich aufträten, durch einen anderen Buchstaben als τ bezeichnet werden.

Für die Definition der *reellen Zahlen* ist vom logischen Standpunkt aus die Schnittdefinition die geeignetste. Im Sinne der verzweigten Analysis gibt es nur reelle Zahlen verschiedener Ordnungen. Bezeichnen wir zur Abkürzung mit $\mathfrak{A}(z)$ die Formel $(Ex)(\varrho x \& z x) \& (Ex)(\varrho x \& \overline{z x})$, mit $\mathfrak{B}(z)$ die Formel $(x)\left(\overline{z x} \vee (Ey)(x \underset{\varrho}{<} y \& z y)\right)$ und mit $\mathfrak{C}(z)$ die Formel $(x)\left(\overline{z x} \vee (y)(\overline{y \underset{\varrho}{\leqq} x} \vee z y)\right)$, so würde die Aussage „$z$ ist eine reelle Zahl der n. Ordnung" durch $\mathfrak{A}(z) \& \mathfrak{B}(z) \& \mathfrak{C}(z) \& \tau_1^n z \& (x)(\overline{z x} \vee \varrho x)$ wiedergegeben werden. Bezeichnen wir diese Formel mit $\mathfrak{R}^n z$, so läßt sich $\mathfrak{R}^n a \vee \overline{\mathfrak{R}^n a}$ beweisen.

Läßt man in $\mathfrak{R}^n a$ das Konjunktionsglied $\tau_1^n a$ fort und setzt dafür $(x)(a x \vee \overline{a x})$, so können wir den veränderten Ausdruck, den wir mit $\mathfrak{R} a$ bezeichnen, lesen als: „a ist eine reelle Zahl". Offenbar läßt sich in Δ, da $\overline{\tau_1^n a} \vee a b \vee \overline{a b}$ beweisbar ist, auch $\overline{\mathfrak{R}^n a} \vee \mathfrak{R} a$ ableiten, d.h. jede reelle Zahl n. Ordnung ist eine reelle Zahl. Die Gleichheit und Größerkleinerbeziehung kann in der üblichen Weise definiert werden, indem wir unter $a \underset{r}{\leqq} b$ und $a \underset{r}{<} b$ Abkürzungen für

$$\mathfrak{R} a \& \mathfrak{R} b \& (x)(\overline{a x} \vee b x \& a x \vee \overline{b x})$$

und

$$\mathfrak{R} a \& \mathfrak{R} b \& (Ex)(\overline{a x} \& b x)$$

verstehen. $\mathfrak{A}\mathfrak{d}\, a\, b\, c$ („die reelle Zahl c entsteht aus a und b durch Addition") soll eine Abkürzung für

$$\mathfrak{R} a \& \mathfrak{R} b \& \mathfrak{R} c \& (z)\left(c z \sim (Ex)(Ey)(a x \& b y \& \varkappa_\varrho x y z)\right)$$

bedeuten, wo $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ für $\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B} \& \mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{B}}$ steht. $\mathfrak{Mu}\, a\, b\, c$ („die reelle Zahl c entsteht aus a und b durch Multiplikation") ist eine Abkürzung für

$$(z)\left((\overline{c z} \sim (a\, 0_\varrho \sim b\, 0_\varrho) \& a\, 0_\varrho \vee b\, 0_\varrho \vee (E x)(x \underset{\varrho}{<} z \& \overline{c x})\right) \sim$$
$$\sim (Ex)(Ey)\left((a x \sim \overline{a\, 0_\varrho}) \& (b y \sim \overline{b\, 0_\varrho}) \& \mu_\varrho x y z)\right)$$

(vgl. die Definition von 0_ϱ zu Eingang dieses Paragraphen). Unsere Überlegungen in § 3, entsprechend übertragen, zeigen nun, daß unser Formalismus zum Aufbau der verzweigten Analysis ausreicht. Der wichtigste Unterschied

gegenüber der gewöhnlichen Analysis liegt darin, daß eine Quantifizierung nur über den Bereich der reellen Zahlen einer bestimmten Ordnung wieder eine reelle Zahl, und zwar eine solche von höherer Ordnung liefert. Zum Beispiel wird eine Menge m von reellen Zahlen n. Ordnung durch einen Term $\mathfrak{m}$ mit den Eigenschaften $\overline{\mathfrak{m}\,a} \vee \Re^n a$ und $\tau_1^{n+1}\,\mathfrak{m}$ wiedergegeben. Die obere Grenze dieser Menge wird durch den Term $\hat{x}(Ey)\,(\tau^n y \,\&\, y\,x \,\&\, \mathfrak{m}\,y)$ dargestellt, der die Eigenschaft $\Re^{n+1}$ hat. Eine Entwicklung der verzweigten Analysis im einzelnen soll hier nicht gegeben werden[4]). Wir konstatieren nur die bemerkenswerte Tatsache, daß das einfache System Δ zum Aufbau der verzweigten Analysis ausreicht.

[4]) Daß man mit Hilfe der verzweigten Analysis einen beträchtlichen Teil der Analysis überhaupt, zum Teil in etwas modifizierter Form erhält, darüber vgl. z.B. P. LORENZEN, Die Widerspruchsfreiheit der klassischen Analysis [Math. Z. **54**, 1—24 (1951)].

Lüdenscheid, Sauerfelderstr. 22.

(Eingegangen am 23. Juni 1952.)

Buchholz, H.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 167—192 (1953)

Die Lösungen einer besonderen Whittakerschen inhomogenen Differentialgleichung.

Von
Herbert Buchholz.

1. *Einleitung.* Es sei die inhomogene Differentialgleichung (D.Gl.)

$$(1)\qquad \begin{cases} z^2\cdot Y''(z)+\left\{\dfrac{1-\mu^2}{4}+\varkappa z-\dfrac{z^2}{4}\right\}\cdot Y(z) \\ \qquad =\dfrac{C}{\Gamma\left(\dfrac{\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\nu+\mu}{2}\right)}\cdot e^{-z/2}\cdot z^{(1+\nu)/2} \qquad z^{(1+\nu)/2}=\exp\left(\dfrac{1+\nu}{2}\cdot\ln z\right) \end{cases}$$

vorgelegt, in der C eine beliebige Konstante bedeutet und μ und $\varkappa$ zwei beliebige reelle oder komplexe Parameter sind. Bei verschwindender rechter Seite bilden die beiden konfluenten hypergeometrischen Funktionen $M_{\varkappa,\mu/2}(z)$ und $W_{\varkappa,\mu/2}(z)$, sofern $\varkappa \neq n+\dfrac{1+\mu}{2}$ mit $n=0,1,2\ldots$ ist, bekanntlich ein linear unabhängiges Lösungspaar von (1). Dabei möge die Funktion $M_{\varkappa,\mu/2}(z)$ gemäß der Gleichung

$$(2)\qquad M_{\varkappa,\mu/2}(z)=\frac{z^{(1+\mu)/2}\cdot e^{-z/2}}{\Gamma(1+\mu)}\cdot {}_1F_1\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa;\ 1+\mu;\ z\right)$$

definiert sein. Diese Definitionsgleichung behält infolge der Gleichung

$$(2a)\quad \Gamma\left(\frac{1-m}{2}-\varkappa\right)\cdot M_{\varkappa,\frac{m}{2}}(z)=\Gamma\left(\frac{1+m}{2}-\varkappa\right)\cdot M_{\varkappa,+\frac{m}{2}}(z)\qquad (m=0,1,2\ldots)$$

auch für ein verschwindendes oder negativ ganzzahliges $\mu=m$ einen Sinn.

Ersetzt man in (1) z durch $z\cdot e^{\mp i\pi}$ und gleichzeitig $\varkappa$ durch $-\varkappa$, so erfährt die linke Seite dieser Gleichung dadurch keine Änderung. Dagegen geht die rechte Seite in (1′) über. Bezeichnet also (1a) diejenige Lösung der inhomo-

$$(1')\quad \frac{C\cdot e^{\pm\pi i\cdot\frac{1+\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)}\cdot e^{+z/2}\cdot z^{\frac{1+\nu}{2}}\qquad (1'')\quad \frac{C'}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)}\cdot e^{+z/2}\cdot z^{\frac{1+\nu}{2}}$$

genen D.Gl. (1), die mit dem Gliede $z^{\frac{1+\nu}{2}}$ beginnt und um den Nullpunkt der z-Ebene herum in eine nach steigenden Potenzen von z fortschreitende Reihe

$$(1a)\quad Y(z)=C\cdot S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)\qquad (1b)\quad Y(z\cdot e^{\pm\pi i})=C'\cdot e^{\mp\pi i\frac{1+\nu}{2}}\cdot S^{(1/2)}_{-\varkappa,\mu/2}(z\cdot e^{\pm\pi i})$$

entwickelbar ist, so ist die Lösung der D.Gl. (1) mit (1″) als Störungsfunktion durch (1b) gegeben.

Wir merken an, daß, wenn $Y(z)$ wie in (1a) eine Lösung von (1) ist, die Funktion $U(z) = Y(z)\, e^{-\alpha z}\, z^{\beta}$ die inhomogene D.Gl.

$$(3)\qquad \begin{cases} z^2 \cdot U''(z) + 2z(\alpha z + \beta) \cdot U'(z) + \\ \quad + [(\alpha^2 - \tfrac{1}{4})\, z^2 + z(2\alpha\beta + \varkappa) + \beta(\beta - i) + (1 - \mu^2)/4] \cdot U(z) \\ \quad = C \cdot z^{\frac{1+\nu}{2} - \beta} \cdot e^{-z/2 - \alpha z} \Big/ \left(\Gamma\left(\frac{\nu - \mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu + \mu}{2}\right) \right) \end{cases}$$

befriedigt.

Um die Lösungsfunktionen von (1) zu bestimmen, machen wir zunächst von der Methode der Variation der Konstanten keinen Gebrauch, sondern bestimmen den analytischen Aufbau der Funktion $S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ von (1a) auf direktem Wege.

2.1. *Die nach steigenden Potenzen von z fortschreitende Lösung.* Wir machen zwecks Lösung von 1 (1) für die Funktion $S^{(\nu\,2)}_{\varkappa,\mu,2}(z)$ den Ansatz

$$(1)\qquad S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z) = \frac{e^{-z/2} \cdot z^{\alpha + \frac{1+\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu - \mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu + \mu}{2}\right)} \cdot F(z) \qquad \text{mit} \qquad F(z) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} p_\lambda \cdot \frac{z^\lambda}{\lambda!}$$

mit zunächst unbekannten Werten von α und p_λ. Durch Einsetzen von (1) in die D.Gl. ergibt sich sofort, daß $F(z)$ nur für ein $\alpha = 0$ von der angenommenen Form sein kann. Die D.Gl., der $F(z)$ selbst genügen muß, hat dann die Gestalt

$$(2)\qquad \begin{cases} z^2 \cdot F''(z) + z(\nu + 1 - z) \cdot F'(z) + \left[\frac{\nu^2 - \mu^2}{4} + z\left(\varkappa - \frac{1+\nu}{2}\right) \right] \cdot F(z) \\ \quad = \dfrac{C}{\Gamma\left(\frac{\nu - \mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu + \mu}{2}\right)} \end{cases}$$

Für die Koeffizienten p_λ in der Entwicklung für $F(z)$ errechnet sich durch Einsetzen in (2) das einfache Bildungsgesetz

$$(3)\qquad \begin{cases} p_\lambda = \dfrac{C}{\Gamma\left(\frac{\nu - \mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu + \mu}{2}\right)} \cdot \dfrac{\delta_{0\lambda}}{\left(\frac{\nu - \mu}{2} + \lambda\right)\left(\frac{\nu + \mu}{2} + \lambda\right)} + \\ \quad + p_{\lambda-1} \cdot \lambda \cdot \dfrac{\frac{\nu - 1}{2} + \lambda - \varkappa}{\left(\frac{\nu + \mu}{2} + \lambda\right)\left(\frac{\nu - \mu}{2} + \lambda\right)} \qquad (\lambda = 0, 1, 2 \ldots). \end{cases}$$

Wir haben mithin das Ergebnis: *Die in der Umgebung des Nullpunktes der z-Ebene gültige Lösung* 1 (1a) *der inhomogenen D.Gl.* 1 (1) *stellt gemäß der*

Definitionsgleichung

$$(4)\qquad \begin{cases} Y(z) = C \cdot S^{(\nu\,2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z) = C \cdot \dfrac{e^{\frac{z}{2}} \cdot z^{\frac{1+\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}+1\right)} \times \\ \qquad \times {}_2F_2\left(1, \frac{\nu+1}{2}-\varkappa; \frac{\nu+\mu}{2}+1, \frac{\nu-\mu}{2}+1; +z\right) \\ \qquad = C \cdot \dfrac{e^{-\frac{z}{2}} \cdot z^{\frac{1+\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa\right)} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} \dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa+\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+1+\lambda\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}+1+\lambda\right)} \cdot z^{\lambda} \end{cases}$$

eine mit $e^{-z/2}$ multiplizierte und in z selbst unbeschränkt konvergente Potenzreihe dar, die mit der Potenz $z^{(1-\nu)/2}$ beginnt. Von dem Faktor $z^{(1-\nu)/2}$ abgesehen, der lediglich eine multiplikative Verzweigung bewirkt, ist die Funktion $S^{(\nu\,2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ nicht nur ganz und transzendent in z, sondern auch in den drei Parametern $u, \varkappa$ und ν. Um das zu erreichen, mußte allerdings auf der rechten Seite von 1 (1) das Γ-Funktionenprodukt aufgenommen werden.

Zwei wichtige allgemeine Eigenschaften der Funktion $S^{(\nu\,2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$, die vorweg erwähnt werden mögen, werden durch die Gleichungen

$$(5)\qquad S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,+\mu/2}(z) = S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,-\mu/2}(z)$$

$$(6a)\qquad \begin{cases} S^{(\nu/2-p)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z) \\ = \dfrac{e^{-\frac{z}{2}} \cdot z^{\frac{1-\nu}{2}-p}}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa-p\right)} \cdot \sum_{\lambda=0}^{p-1} \dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa+\lambda-p\right)\cdot z^{\lambda}}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}-p+\lambda+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}-p+\lambda+1\right)} + \\ + \dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa-p\right)} \cdot S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z) \qquad (p=0,1,2\ldots) \end{cases}$$

$$(6b)\qquad \begin{cases} S^{(\nu/2+p)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z) \\ = -\dfrac{e^{-\frac{z}{2}} \cdot z^{\frac{1-\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa+p\right)} \cdot \sum_{\lambda=0}^{p-1} \dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa+\lambda\right)\cdot z^{\lambda}}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}-\lambda+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}+\lambda+1\right)} + \\ + \dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa+p\right)} \cdot S^{(\nu\,2)}_{\varkappa,\,\mu\,2}(z) \end{cases}$$

wiedergegeben. Nach (5) ist sie eine in μ gerade Funktion, falls die anderen beiden Parameter nicht auch von μ abhängen. In (6a, b) fallen die beiden endlichen Summen für $p=0$ fort. Nach (4) ist ferner

$$(7)\qquad S^{(\pm\mu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z) = M_{\varkappa,\,\pm\mu/2}(z)$$

und damit auf Grund von (6a, b) für beide Vorzeichen von μ:

$$S^{(\mu/2-p)}_{\varkappa,\mu/2}(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa-p\right)} \cdot M_{\varkappa,\mu/2}(z) \qquad (p = 1, 2, 3 \ldots) \tag{8a}$$

$$\left\{ \begin{aligned} S^{(\mu/2+p)}_{\varkappa,\mu/2}(z) = {} & \frac{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa+p\right)} \cdot M_{\varkappa,\mu/2}(z) - \\ & - \frac{e^{-z/2} \cdot z^{\frac{1+\mu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa+p\right)} \cdot \sum_{\lambda=0}^{p-1} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}-\varkappa+\lambda\right)}{\Gamma(\mu+1+\lambda)\cdot\lambda!} z^{\lambda}. \end{aligned} \right. \tag{8b}$$

In (8b) enthält der zweite Summand auf der rechten Seite im Hinblick auf die Gl. 1(2) die p ersten Glieder in der Entwicklung des ersten Summanden dieser Gleichung.

Besonders einfache spezielle Fälle von $S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}$ liegen vor für $\varkappa = \frac{\nu+1}{2}$, $\varkappa = \frac{\mu-1}{2}$ und $\varkappa = -\frac{\mu+1}{2}$.

2.2. *Die nach fallenden Potenzen von z fortschreitende Lösung.* Bezeichnen wir in diesem Falle die lösende Funktion der gegebenen inhomogenen D.Gl. in 1(1a) mit $T^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ und machen dafür den Ansatz

$$T^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z) = \frac{e^{-z/2} \cdot z^{\frac{1-\nu}{2}+\alpha}}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)} \cdot G(z) \quad \text{mit} \quad G(z) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{a_\lambda}{z^\lambda}, \tag{9}$$

so muß jetzt in (9), um auf beiden Gleichungsseiten eine Übereinstimmung in dem höchsten Exponenten von z zu erzielen, $\alpha = -1$ gemacht werden. Für die Koeffizienten a_λ ergibt sich auch diesmal ein sehr einfaches Bildungsgesetz. Die Lösung stellt sich schließlich in der Form

$$\left\{ \begin{aligned} Y(z) &= C \cdot T^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z) \\ &\sim C \cdot \frac{e^{-z/2} \cdot z^{\frac{\nu-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa\right)} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}-\varkappa+\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}-\lambda\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}-\lambda\right)} \cdot z^{-\lambda} \\ &\sim C \cdot \frac{e^{-z/2} \cdot z^{\frac{\nu-1}{2}}}{\left(\varkappa+\frac{1-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)} \times \\ &\quad \times {}_3F_1\left(1, 1-\frac{\nu+\mu}{2}, 1-\frac{\nu-\mu}{2}; \varkappa+\frac{3-\nu}{2}; -\frac{1}{z}\right) \end{aligned} \right. \tag{10}$$

dar.

Diese Entwicklung ist für beliebige Werte von ν, μ und $\varkappa$ bei jedem von Null verschiedenen z divergent. Sie ist als eine nur für große Werte von z brauchbare asymptotische Lösung der gegebenen inhomogenen D.Gl. anzu-

sprechen. Für $(\nu \pm \mu)/2 = p$ und $p = 1, 2, 3 \ldots$ bricht die Entwicklung hinter dem Gliede $\lambda = p-1$ ab. Sie ist dann eine wirkliche und für alle z brauchbare Lösung der D.Gl. Setzt man demgemäß etwa $\nu/2 = \mu/2 + p$, so folgt aus (10):

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} T^{(\mu,\,2\,+\,p)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z) &= -\frac{e^{-z/2}\cdot z^{\frac{\mu-1}{2}+p}}{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}-\varkappa+p\right)}\cdot\sum_{\lambda=0}^{p-1}\frac{\Gamma\left(\frac{\mu-1}{2}-\varkappa-\lambda+p\right)}{\Gamma(p+\mu-\lambda)\cdot\Gamma(p-\lambda)}z^{-\lambda} \\ &= -\frac{e^{-z/2}\cdot z^{\frac{1+\mu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa+p\right)}\cdot\sum_{\lambda=0}^{p-i}\frac{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}-\varkappa+\lambda\right)z^{\lambda}}{\Gamma(\mu+1+\lambda)\cdot\lambda!}\,. \end{aligned} \right.$$

Das auf der rechten Seite von (11) stehende Polynom ist aber genau das gleiche, das in (8b) auftritt. In der Tat ist das in der zuletzt erwähnten Gleichung außerdem noch vorkommende Glied nicht eigentlich eine Lösung der inhomogenen, sondern bereits der homogenen Gleichung.

3. *Definition der beide Lösungen vereinigenden Funktion* $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$. Es zeigt sich nun: *Die beiden Lösungen* (4) *und* (9) *haben ihren gemeinsamen Ursprung in der Integraldarstellung*

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\pi\cdot R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z) = \sin\frac{\pi}{2}(\mu-\nu)\cdot\sin\frac{\pi}{2}(\mu+\nu)\cdot\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}+\varkappa\right)\times \\ &\qquad\times\frac{e^{-z/2}\cdot z^{(1+\nu)/2}}{2\pi i}\int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty}\frac{\Gamma\left(-\frac{\nu-\mu}{2}-t\right)\Gamma\left(-\frac{\nu+\mu}{2}-t\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu-1}{2}+\varkappa-t\right)\cdot\sin(\pi t)}\cdot z^{t}\cdot dt \\ &\qquad\left(-1<\tau<0,\quad |z|\text{ bel.},\quad |\arc(z)|<3\pi/2\right) \end{aligned} \right.$$

für die Funktion $R^{(\nu\,2)}_{\varkappa,\,\mu\,2}(z)$. Der Integrationsweg des MELLIN-Integrals in (1) muß die reelle t-Achse zwischen den Punkten $-1 \ldots 0$ schneiden, und er muß notfalls unter Einzug von Schleifen alle im allgemeinen einfachen Pole der beiden im Zähler stehenden Γ-Funktionen zu seiner Rechten lassen. Unter z^t ist im Integranden von (1) der Ausdruck $\exp[t\cdot\ln(z)]$ zu verstehen mit $\ln(z)$ als dem Hauptwert.

Setzt man in (1) $t = |t|\cdot e^{i\varphi}$ und $z = |z|\cdot e^{i\zeta}$, so besteht auf dem unendlich fernen Halbkreis der rechten t-Halbebene für den Absolutbetrag des Integranden die asymptotische Näherung:

$$(1a)\quad \left\{ \exp\left\{-|t|\cos\varphi\cdot\ln\left(\frac{|t|}{e\cdot|z|}\right)-\Re\left(\frac{\nu}{2}+\varkappa\right)\cdot\ln|t|-|t|\cdot\sin|\varphi|\times\right. \right.$$
$$\left.\left.\times\left(2\pi+\operatorname{sgn}\varphi\cdot(\zeta-\varphi)\right)\right\}.$$

Auf dem Integrationsweg von (1) selbst ergibt sich also das folgende Bild: Es ist der Exponent

für $\varphi = +\pi/2$: $\qquad -\Re\left(\frac{\nu}{2}+\varkappa\right)\cdot\ln|t|+$

für $\varphi = -\pi/2$:

und einem $z =$ $\quad z \qquad z \cdot e^{+\pi i} \qquad z \cdot e^{-\pi i}$

$$+\begin{cases} -|t|\left(\frac{3\pi}{2}+\zeta\right) & -|t|\left(\frac{5\pi}{2}+\zeta\right) & -|t|\left(\frac{\pi}{2}+\zeta\right) \\ -|t|\left(\frac{3\pi}{2}-\zeta\right) & -|t|\left(\frac{\pi}{2}-\zeta\right) & -|t|\left(\frac{5\pi}{2}-\zeta\right) \end{cases}.$$

Der Phasenwinkel von z in (1) kann also ohne Gefährdung der Konvergenz des Integrals vom Nullwert aus nach beiden Richtungen um $3\pi/2$ zunehmen. Außerdem läßt der Ausdruck (1a) erkennen, daß unter der gleichen Voraussetzung über arc (z) der Integrand von (1) längs des ganzen unendlich fernen Halbkreises der rechten t-Halbebene, d.h. für alle $|\varphi| \leqq \pi/2$, verschwindet. Man darf daher ohne Wertänderung des Integrals den offenen Integrationsweg in (1) durch Ansetzen eines solchen Halbkreises zu einem geschlossenen Weg machen. Nach dem Residuensatz muß dann das Integral gleich der Summe der Residuen in allen rechts vom Integrationsweg gelegenen Polen sein. Nun treten im vorliegenden Falle drei unendliche Polketten auf, nämlich mit $\lambda = 0, 1, 2, 3 \ldots$ in den Punkten

$$\alpha) \quad t = -\frac{\nu-\mu}{2} + \lambda \qquad \beta) \quad t = -\frac{\nu+\mu}{2} + \lambda \quad \text{und} \quad \gamma) \quad t = \lambda.$$

Alle diese Pole sind einfach, solange 1. $\frac{\nu \mp \mu}{2} \neq \pm p$ ist mit $p = 0, 1, 2 \ldots$ und 2. μ selbst von einer ganzen Zahl verschieden ist. Unter dieser vorläufigen Beschränkung macht die Berechnung der Residuen in den einzelnen Polen keine Schwierigkeit. Wir begnügen uns mit der bloßen Angabe des Ergebnisses. Es läßt sich unter Anwendung bekannter Formeln aus der Theorie der parabolischen Funktionen auf die folgenden drei Formen bringen:

$$(2) \quad R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z) = \begin{cases} S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z) + \dfrac{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}+\varkappa\right)}{\sin\pi\mu} \cdot \left[-\sin\frac{\pi}{2}(\nu+\mu) \cdot \dfrac{M_{\varkappa,\mu/2}(z)}{\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}+\varkappa\right)} + \right. \\ \qquad \left. + \sin\frac{\pi}{2}(\nu+\mu) \cdot \dfrac{M_{\varkappa,-\mu/2}(z)}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}+\varkappa\right)} \right] \\ \text{oder} \\ S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z) - \dfrac{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}-\varkappa\right)} M_{\varkappa,\mu/2}(z) + \frac{1}{\pi} \cdot \sin\frac{\pi}{2}(\nu-\mu) \times \\ \qquad \times \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}+\varkappa\right) \cdot \dfrac{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}+\varkappa\right)} W_{\varkappa,\mu/2}(z) \qquad |\arg(z)| < \frac{3\pi}{2} \\ \text{oder} \\ S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z) - \dfrac{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}+\varkappa\right)}{2\pi} \times \\ \qquad \times \left[e^{+\frac{\pi i \nu}{2}} W_{-\varkappa,\mu/2}(z \cdot e^{+\pi i}) + e^{-\frac{\pi i \nu}{2}} W_{-\varkappa,\mu/2}(z \cdot e^{-\pi i}) \right]. \end{cases}$$

Die Funktion $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ enthält demnach einmal in der Funktion $S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ einen Bestandteil, der die inhomogene D.Gl. 1(1) befriedigt. Die übrigen Bestandteile werden von den Funktionen $M_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ und $M_{\varkappa,\,-\frac{\mu}{2}}(z)$ oder $W_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ gebildet, die die zugehörige Gleichung befriedigen. Im ganzen genügt also die Funktion $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ ebenfalls der inhomogenen D.Gl. Wir können es uns also ersparen, diese Tatsache an dem Integral (1) nachzuprüfen.

Bei der Herleitung von (2) müssen bei der Berechnung der Residuen die Fälle eines $\frac{\nu+\mu}{2} = \pm p$ und eines ganzzahligen Wertes von μ ausgeschlossen werden. Bei der von uns gewählten Form des Endergebnisses beanspruchen jedoch diese Ausnahmefälle keine besondere Berücksichtigung mehr, denn man rechnet aus der ersten Form von (2) ohne weiteres aus, daß für ein $\frac{\nu}{2} = \frac{\mu}{2} + p$ mit $p = 1, 2, 3\ldots$ in Rücksicht auf die Gl. 2 (8b) neuerdings die Beziehung

$$(4a)\qquad \left\{\begin{aligned} R^{(\mu/2+p)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z) &= -\frac{e^{-z/2}\,z^{\frac{1+\mu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa+p\right)}\cdot\sum_{\lambda=0}^{p-1}\frac{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}-\varkappa+\lambda\right)}{\Gamma(\mu+1+\lambda)}\cdot\frac{z^\lambda}{\lambda!} \\ &= -\frac{e^{-z/2}\,z^{\frac{1+\mu}{2}}}{\Gamma(1+\mu)}\cdot\frac{\sum_{\lambda=0}^{p-1}\frac{\left(\frac{\mu+1}{2}-\varkappa\right)_\lambda}{(\mu+1)_\lambda}\cdot\frac{z^\lambda}{\lambda!}}{\left(\frac{\mu+1}{2}-\varkappa\right)_p} \qquad (p=1,2\ldots)\end{aligned}\right.$$

$$(4b)\qquad R^{(\mu/2-p)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z) = 0 \qquad (p=0,1,2\ldots)$$

entsteht, während sich für ein $\frac{\nu}{2} = \frac{\mu}{2} - p$ im Hinblick auf 2(8a) der Wert 0 errechnet. In (4a) stehen im übrigen auf der rechten Seite in der Summe die p ersten Entwicklungsglieder der Funktion

$$\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}-\varkappa\right)\Big/\Gamma(1+u)\cdot{}_1F_1\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa;\ 1+\mu, z\right).$$

Was den Fall eines ganzzahligen $\mu = m$ anbetrifft, so folgt hierfür aus der zweiten Form von (2) sofort die Relation:

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,m/2}(z) &= S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,m/2}(z) + \frac{1}{\pi}\cdot\sin\frac{\pi}{2}(\nu-m)\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1+m}{2}-\varkappa\right)}{\Gamma\left(\frac{1+m}{2}+\varkappa\right)}\times \\ &\quad\times\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}+\varkappa\right)\cdot W_{\varkappa,\,m/2}(z) - \frac{\Gamma\left(\frac{1+m}{2}-\varkappa\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}-\varkappa\right)}\cdot M_{\varkappa,\,m/2}(z).\end{aligned}\right.$$

Hier stecken die bei der Berechnung der Residuen aus den Polen zweiter Ordnung auftretenden logarithmischen Terme bereits in der Funktion $W_{\varkappa, m/2}(z)$. Für $\nu = m$ wird in Übereinstimmung mit (4b) wiederum die rechte Seite von (5) zu Null.

Schließlich zeigt sich an der ersten Form der Gl. (2) sofort, daß gemäß Gl. (6) auch die Funktion $R^{(\nu/2)}_{\varkappa, \mu/2}(z)$, solange μ weder in ν noch in $\varkappa$ vorkommt, eine in μ gerade Funktion darstellt:

$$R^{(\nu/2)}_{\varkappa, \mu/2}(z) = R^{(\nu/2)}_{\varkappa, -\mu/2}(z). \tag{6}$$

Den Gl. 2(6a, b) entsprechen im vorliegenden Falle die beiden Beziehungen:

$$\left\{ \begin{aligned} & R^{(\nu/2-p)}_{\varkappa, \mu/2}(z) \\ & = \frac{e^{-z/2} \cdot z^{\frac{1+\nu}{2}-p}}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa-p\right)} \cdot \sum_{\lambda=0}^{p-1} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa+\lambda-p\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}+\lambda-p+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+\lambda-p+1\right)} \cdot z^{\lambda} + \\ & + \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa-p\right)} \cdot R^{(\nu/2)}_{\varkappa, \mu/2}(z) \qquad (p = 1, 2 \ldots) \end{aligned} \right. \tag{7a}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & R^{(\nu/2+p)}_{\varkappa, \mu/2}(z) \\ & = -\frac{e^{-z/2} z^{\frac{1+\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa+p\right)} \cdot \sum_{\lambda=0}^{p-1} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa+\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}+\lambda+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+\lambda+1\right)} \cdot z^{\lambda} + \\ & + \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa+p\right)} \cdot R^{(\nu/2)}_{\varkappa, \mu/2}(z). \end{aligned} \right. \tag{7b}$$

Um den Zusammenhang der Funktion $R^{(\nu/2)}_{\varkappa, \mu/2}(z)$ mit der Funktion $T^{(\nu/2)}_{\varkappa, \mu/2}(z)$ von Gl. 2(3) zu gewinnen, berücksichtigen wir jetzt die links vom Integrationsweg der Gl. (1) gelegene Polkette, die von den Punkten $t = -1, -2, -3 \ldots$ gebildet wird. In diesem Falle ist es nun zwar nicht mehr möglich, die Auswertung des Integrals (1) nach dem Residuensatz in der Weise vorzunehmen, daß man einen Halbkreis von unbegrenzt großem Radius von links her an den Integrationsweg von (1) ansetzt, denn es würde sich zeigen, daß auf ihm der Absolutbetrag des Integranden unbeschränkt zunimmt. Verschiebt man aber jetzt statt dessen den Integrationsweg etwa um N Einheiten nach links, so daß er neuerdings die reelle t-Achse im Punkte $-N-\delta$ mit $0 < \delta < 1$ schneidet, so läßt sich bei diesem Vorgehen immerhin nachweisen, daß wenigstens der Absolutbetrag des Integranden längs der beiden unendlich fernen horizontalen Seiten des entstehenden Rechtecks verschwindet. Auf dem neuen vertikalen Wegbestandteil aber ist er von der Ordnung $O\{|z|^{-N-\delta}\}$. Eine genauere Abschätzung läßt sich nur schwer erreichen. Die auf diese Weise

entstehende Entwicklung hat also asymptotischen Charakter. Sie lautet:

$$(8)\quad \begin{cases} R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z) = T^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z) \\ \sim -\dfrac{e^{-z/2}\cdot z^{\frac{\nu-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa\right)}\cdot\sum_{\lambda=0}^{N-i}\dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}-\varkappa-\lambda\right)z^{-\lambda}}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}-\lambda\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}+\lambda\right)}+O\left(|z|^{(1+\nu)/2-N-\delta}\right) \\ \sim \dfrac{e^{-z/2}\cdot z^{(\nu-1)/2}}{\left(\varkappa+\frac{1-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)}\times \\ \times\, {}_3F_1\left(1,\ 1-\frac{\nu-\mu}{2},\ 1-\frac{\nu+\mu}{2};\ \frac{3-\nu}{2}+\varkappa;\ -\frac{1}{z}\right). \end{cases}$$

Das ist genau dieselbe Entwicklung nach fallenden Potenzen von z, die sich im § 2.2 durch einen entsprechenden Lösungsansatz für die inhomogene D.Gl. 1 (1) ergeben hatte.

Im Gegensatz zur Funktion $S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ ist die Funktion $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ nur noch hinsichtlich μ ganz und transzendent. Im Hinblick auf die Variablen ν und $\varkappa$ hat sie meromorphen Charakter, denn offenbar besitzt sie auf Grund der zweiten Form von Gl. (2) eine unendliche Kette einfacher Pole in den Punkten $\nu/2=\frac{1}{2}+\varkappa+p$ mit $p=0, 1, 2\ldots$, und da nach (2) die Grenzwertgleichung

$$(9a)\quad \lim_{\frac{\nu}{2}\to\frac{1}{2}+\varkappa-p}\left\{\frac{R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}+\varkappa\right)}\right\}=(-)^p\cdot\frac{W_{\varkappa,\mu/2}(z)}{\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}+\varkappa\right)\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}+\varkappa\right)} \qquad (p=0, 1, 2\ldots)$$

besteht, so berechnen sich die Residuen von $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ in diesen Polen hinsichtlich ν selbst gemäß der Gleichung:

$$(9b)\quad \mathfrak{Res}_{\frac{\nu}{2}=\frac{1}{2}+\varkappa-p}\left\{R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)\right\}=-\frac{2}{p!}\cdot\frac{W_{\varkappa,\mu/2}(z)}{\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}+\varkappa\right)\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}+\varkappa\right)} \qquad (p=0, 1, 2\ldots).$$

Geht man in (1) mit ν zu dem Wert $1+2\varkappa+2p$ über, berücksichtigt dabei die Gl. (9a) und setzt dann noch unter dem Integralzeichen $t+p+1=+s$, so entsteht für $W^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ die Integraldarstellung

$$(10)\quad \begin{cases} W_{\varkappa,\mu/2}(z)=\dfrac{z^{\varkappa}\cdot e^{-z/2}}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}-\varkappa\right)}\times \\ \times\dfrac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Gamma(+s)\,\Gamma\left(-s+\frac{1+\mu}{2}-\varkappa\right)\Gamma\left(-s+\frac{1-\mu}{2}-\varkappa\right)\cdot z^s\cdot ds \\ \left(|\arc(z)|<\frac{3\pi}{2}\right), \end{cases}$$

die bekanntlich zuerst von E. W. BARNES[1]) angegeben worden ist. Der Integrationsweg ist in (10) so zu führen, daß er die nach links strebende Polkette von $\Gamma(+s)$ und die nach rechts strebenden Polketten der anderen beiden Γ-Funktionen voneinander trennt.

4. *Die modifizierte Funktion* $\mathfrak{R}^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$. Ist in der Ausgangsgleichung 1(1) $\nu/2 = \pm\mu/2 - p$ mit $p = 0, 1, 2 \ldots$, so wird diese Gleichung infolge der besonderen Wahl der Konstanten auf der rechten Seite homogen. Dem entspricht es, daß die beiden hier eingeführten Lösungsfunktionen S und R gemäß den Gl. 2(8a) und 3(4b) in diesem Falle entweder in die Funktion $M_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ übergehen oder ganz verschwinden. Da nun die Lösung der inhomogenen D.Gl. 1(1) durch $Y(z) = C \cdot R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ gegeben ist, so liegt die Lösung der inhomogenen D.Gl.

$$(1) \qquad z^2 \cdot y''(z) + \left\{\frac{1-\mu^2}{4} + \varkappa z - \frac{z^2}{4}\right\} \cdot y(z) = A \cdot e^{-z/2} \cdot z^{\frac{1+\nu}{2}}$$

in der Funktion

$$(2) \qquad y(z) = A \cdot \Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right) \cdot R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z) \equiv A \cdot \mathfrak{R}^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu,2}(z)$$

vor. Man braucht also lediglich, um die Lösung von (1) zu bekommen, in den vorstehenden Formeln die Funktion $R^{(\nu\,2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ mit dem angegebenen Produkt der beiden Γ-Funktionen zu multiplizieren. Das erfordert nur eine besondere Rechnung, wenn $\nu/2$ gerade den Wert $\pm\mu/2 - p$ hat. An diesen Stellen von ν hat dann zwar eine dieser beiden Γ-Funktionen einen einfachen Pol. Nach Gl. 3(4b) hat aber für dieselben Werte von ν die Funktion $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ eine einfache Nullstelle. Die jetzt betrachtete Funktion $\mathfrak{R}^{(\nu\,2)}_{\varkappa,\,\mu\,2}$ sagt in diesem Falle mehr aus.

Anstatt die dadurch erforderlich werdende Grenzwertbestimmung an der Gl. 3(2) vorzunehmen, kann man auch direkt von der für die modifizierte Funktion $\mathfrak{R}^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ im Falle eines $\nu/2 = \mu/2 - p$ gültigen Integraldarstellung

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathfrak{R}^{(\mu/2-p)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z) = \dfrac{(-)^{p+1}\pi \cdot \Gamma\left(\dfrac{1-\mu}{2} + \varkappa + p\right)}{p!\,\Gamma(1+p-\mu)} \cdot e^{-z/2} \times \\ \qquad \times \dfrac{z^{(1+\mu)/2}}{2\pi i} \displaystyle\int_{\tau-p-i\infty}^{\tau-p+i\infty} \dfrac{\Gamma(-s)\,\Gamma(-\mu-s) \cdot z^s}{\Gamma\left(\varkappa + \dfrac{1-\mu}{2} - s\right) \cdot \sin(\pi s)} \cdot ds & (p = 0, 1, \ldots) \\ & (-1 < \tau < 0) \end{cases}$$

ausgehen, die der Gl. 3(1) entspricht, nachdem sie mit $\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)$ multipliziert worden ist. Der dabei gleichzeitig nach links verschobene Integrationsweg von (3) ist darin so zu führen, daß er die reelle Achse der s-Ebene

[1]) BARNES, E. W.: Trans. Cambr. Phil. Soc. **20**, 253—279 (1908).

zwischen den Punkten $-p$ und $-p-1$ schneidet und notfalls durch Einzug einer Schleife sämtliche Pole von $\Gamma(-s)$ und $\Gamma(-\mu-s)$ zur Rechten hat.

Man übersieht sofort, daß im Integranden von (3) selbst bei beliebigen Werten von μ jetzt auch Pole zweiter Ordnung auftreten, und zwar an den Stellen $s=0, 1, 2 \ldots$. Die übrigen rechts vom Integrationsweg liegenden Pole sind nach wie vor von der ersten Ordnung. Man erhält demnach jetzt die Entwicklung

$$
\begin{cases}
\mathfrak{R}^{(\mu'2-p)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z) = \dfrac{(-)^p\,\Gamma(\mu-p)}{p!\,\Gamma\left(\dfrac{1+\mu}{2}-\varkappa-p\right)}\cdot e^{-z/2}\cdot z^{\frac{1+\mu}{2}}\cdot\sum_{\lambda=0}^{\infty}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{1+\mu}{2}-\varkappa+\lambda\right)}{\Gamma(1+\mu+\lambda)\cdot\lambda!}\times \\
\times z^{\lambda}\cdot\left[\Psi\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa+\lambda\right)-\Psi(1+\mu+\lambda)-\Psi(1+\lambda)\right]+ \\
+\dfrac{(-)^p\,\Gamma\left(\dfrac{1-\mu}{2}-\varkappa-p\right)}{p!\,\Gamma(1+p-\mu)}\cdot e^{-z/2}\cdot z^{\frac{1-\mu}{2}}\sum_{\lambda=0}^{p}\dfrac{\Gamma(\lambda-\mu)\,(\lambda-1)!}{\Gamma\left(\lambda+\varkappa+\dfrac{1-\mu}{2}\right)}\cdot\left(-\frac{1}{z}\right)^{\lambda}+ \\
+\dfrac{\Gamma(\mu-p)\,\Gamma\left(\dfrac{1-\mu}{2}+\varkappa-p\right)}{p!\,\Gamma\left(\dfrac{1-\mu}{2}+\varkappa\right)}\times \\
\times\left\{\ln z\cdot M_{\varkappa,\mu/2}(z)+\dfrac{\pi}{\cos\pi\left(\varkappa+\dfrac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{1+\mu}{2}+\varkappa\right)}\cdot W_{\varkappa,\frac{\mu}{2}}(z)\right\}
\end{cases}
\tag{4}
$$

$(p=0, 1, 2\ldots)$

in der für $p=0$ die endliche Summe in der zweiten Zeile fortfällt.

Wird überdies die bisher immer noch beliebige Zahl μ einer ganzen positiven Zahl m gleich, so verliert auch diese Formel ihren Sinn, und man geht am besten wiederum von der Gl. (3) aus. In ihrem Integranden treten für $\mu=m$ nun sogar Pole dritter Ordnung auf. Wir wollen jedoch diesen Fall nicht weiter verfolgen.

5. *Halbumlaufrelationen für die Funktion* $R^{(\nu'2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$. Für die Funktion $R^{(\nu'2)}_{\varkappa,\,\mu\,2}(z)$ bestehen zwei sehr einfache Halbumlaufsrelationen. Sie ergeben sich beide am einfachsten aus der Gl. 3(2). Wird hierin der Phasenwinkel von z auf den Bereich $|\arc(z)|<\pi/2$ beschränkt, so darf die Gl. 3(2) sowohl für $z\cdot e^{+\pi i}$ als auch für $z\cdot e^{-\pi i}$ benutzt werden. Multiplizieren wir sie dann in der ersten Form in dem einen Falle mit $\exp(-\pi i/2(\nu+1))$ und im anderen Falle mit $\exp(+\pi i/2\cdot(\nu+1))$ und subtrahieren beide Ausdrücke voneinander, so fällt aus der Differenz die Funktion $S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu,\,2}(z)$ heraus, da sie sich ja für das Argument $z\cdot e^{+\pi i}$ gerade mit dem Ausdruck $\exp(+\pi i/2\cdot(\nu+1))$ vervielfacht. Wendet man dann noch die bekannte Relation

$$
M_{\varkappa,\mu/2}\left(z\cdot e^{\pm\pi i}\right)=e^{\pm\frac{\pi i}{2}(1+\mu)}\cdot M_{-\varkappa,\mu/2}(z) \tag{1a}
$$

an und berücksichtigt die Definitionsgleichung

$$(1\,b)\qquad W_{\varkappa,\mu/2}(z)=\frac{\pi}{\sin\pi\mu}\cdot\left\{-\frac{M_{\varkappa,\mu/2}(z)}{\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}-\varkappa\right)}+\frac{M_{\varkappa,-\mu/2}(z)}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa\right)}\right\}$$

für die Funktion $W_{\varkappa,\mu/2}(z)$, so erhält man sofort die Formel

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &e^{-\frac{\pi i}{2}(1+\nu)}\cdot R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z\cdot e^{+\pi i})-e^{+\frac{\pi i}{2}(1+\nu)}\cdot R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z\cdot e^{-\pi i})\\ &\qquad=\frac{2}{\pi i}\sin\frac{\pi}{2}(\nu+\mu)\cdot\sin\frac{\pi}{2}(\nu-\mu)\cdot\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}+\varkappa\right)W_{-\varkappa,\mu/2}(z)\\ &\qquad\qquad\left(|\arc(z)|<\frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}\right.$$

Sie hätte sich im Hinblick auf 3 (10) auch mittels der Gl. (1) von Abschnitt 3 beweisen lassen.

Multipliziert man andererseits die erste Form der Gl. 3 (2), genommen für das Argument $z\cdot e^{+\pi i}$, mit $\exp(+\pi i/2\cdot(1\pm\mu))$ und mit $\exp(-\pi i/2\cdot(1\pm\mu))$, wenn man sie für das Argument $z\cdot e^{-\pi i}$ anschreibt, und subtrahiert wiederum die beiden so erhaltenen Beziehungen, so gelangt man im Hinblick auf 2.1 (4) zu der Formel

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &e^{+\frac{\pi i}{2}(1\pm\mu)}\cdot R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z\cdot e^{+\pi i})-e^{-\frac{\pi i}{2}(1\pm\mu)}\cdot R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z\cdot e^{-\pi i})\\ &=2i\cdot\sin\frac{\pi}{2}(\nu\pm\mu)\cdot\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}+\varkappa\right)}{\Gamma\left(\frac{1\mp\mu}{2}+\varkappa\right)}\cdot M_{-\varkappa,\mp\mu/2}(z)-\right.\\ &\quad-\frac{e^{z/2}\cdot z^{(1+\nu)/2}}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}+1\right)}\times\\ &\quad\left.\times\,{}_2F_2\left(1,\frac{\nu+1}{2}-\varkappa;\ \frac{\nu+\mu}{2}+1,\ \frac{\nu-\mu}{2}+1;\ -z\right)\right\}\qquad\left(|\arc(z)|<\frac{\pi}{2}\right),\end{aligned}\right.$$

in der entweder die oberen oder die unteren Vorzeichen Geltung haben.

Aus den Gl. (2) und (3) könnte man nun noch entweder die Funktion $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}$ mit dem Argument $z\cdot e^{+\pi i}$ oder die mit dem Argument $z\cdot e^{-\pi i}$ eliminieren. Es führt dies aber zu sehr unübersichtlichen Beziehungen.

6. *Die z-Asymptotik der Funktionen* $S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ *und* $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$. Von den beiden hier eingeführten Lösungsfunktionen der inhomogenen D.Gl. 1 (1) zeigt in Analogie zur Funktion $W_{\varkappa,\mu/2}(z)$ die Funktion $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ das einfachere asymptotische Verhalten. Diesem Umstand vor allem verdankt sie ihre besondere Daseinsberechtigung. Nach Gl. 3 (8) ist nämlich in dem nicht abgeschlossenen

Winkelbereich $|\arc(z)|<3\pi/2$:

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu,2}(z)\sim \dfrac{e^{-z/2}\cdot z^{\frac{\nu-1}{2}}}{\left(\varkappa+\frac{1-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)}\times \\ \qquad\times {}_3F_1\left(1,1-\frac{\nu-\mu}{2},1+\frac{\nu-\mu}{2};\frac{3-\nu}{2}+\varkappa;-\frac{1}{z}\right) \\ \qquad z\to\infty\left(+\frac{3\pi}{2}-\delta,-\frac{3\pi}{2}+\delta\right). \end{array}\right.$$

Diese Entwicklung gilt für alle Werte von μ, ν und $\varkappa$ mit Ausnahme derjenigen Werte von ν, für die mit $p=0,1,2\ldots$ $\nu/2=1/2+\varkappa+p$ ist. Nach Gl. 3 (9a, b) geht aber in diesem Falle die Funktion $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ in die Funktion $W_{\varkappa,\mu/2}(z)$ über. Von dieser Funktion ist aber ihrerseits bereits bekannt, daß sie in dem gleichen Winkelbereich die asymptotische Entwicklung

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} W_{\varkappa,\mu/2}(z)\sim e^{-z/2}\cdot z^{\varkappa}\cdot {}_2F_0\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa,\frac{1-\mu}{2}-\varkappa;-\frac{1}{z}\right) \\ \qquad z\to\infty\left(+\frac{3\pi}{2}-\delta,-\frac{3\pi}{2}+\delta\right) \end{array}\right.$$

besitzt.

Die asymptotische Darstellung der Funktion $S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ ist wesentlich verwickelter. Sie kann unter Zuhilfenahme von (1) und der bekannten asymptotischen Entwicklung der Funktion $M_{\varkappa,\mu/2}(z)$, die durch die Beziehung

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} M_{\varkappa,\mu/2}(z)\sim \dfrac{z^{-\varkappa}\cdot e^{z/2}}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa\right)}\cdot {}_2F_0\left(\frac{1+\mu}{2}+\varkappa;\frac{1-\mu}{2}+\varkappa;\frac{1}{z}\right)+ \\ \quad +e^{\pm\pi i\left(\varkappa-\frac{1+\mu}{2}\right)}\dfrac{z^{\varkappa}\cdot e^{-z/2}}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}+\varkappa\right)}\cdot {}_2F_0\left(\frac{1-\mu}{2}-\varkappa,\frac{1+\mu}{2}-\varkappa;-\frac{1}{z}\right) \\ \qquad z\to\infty\left(+\frac{3\pi}{2}-\delta,-\frac{3\pi}{2}+\delta\right) \\ \qquad \text{oberes Vorzeichen: } -\frac{3\pi}{2}<\arc(z)<+\frac{\pi}{2} \\ \qquad \text{unteres Vorzeichen: } -\frac{\pi}{2}<\arc(z)<+\frac{3\pi}{2} \end{array}\right.$$

gegeben ist, aus der Gl. 3 (2) gewonnen werden. Die Gl. (3) ist dabei in der folgenden Weise zu deuten: Sie gilt in der angeschriebenen Form für jedes $z\to\infty$, falls $|\arc(z)|<3\pi/2$ ist. Dabei ist jedoch auf die Vorzeichenregel zu achten. Es kann aber natürlich in dem Bereich $|\arc(z)|<\pi/2$ der zweite Term auf der rechten Gleichungsseite fortgelassen werden und in dem Bereich $+\pi/2<|\arc(z)|<3\pi/2$ der erste Term. Dabei ist dann das Vorzeichen des Exponenten der e-Funktion entsprechend den Angaben zu dieser Gleichung

zu wählen. Für ein $\arg(z) = \pm\pi/2$ braucht lediglich derjenige Term beibehalten zu werden, für den $\Re(\pm\varkappa) > 0$ ist, und nur für $\arg(z) = \pm\pi/2$ und ein $\Re(\varkappa) = 0$ müssen in (3) beide Summanden nebeneinander benutzt werden.

Auf Grund der zweiten Form von Gl. 3 (2) ergibt sich damit für die asymptotische Darstellung der Funktion $S^{(\nu,2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ der Ausdruck:

$$
(4)\quad
\begin{cases}
S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z) \sim \dfrac{e^{-z/2}\cdot z^{(\nu-1)/2}}{\left(\varkappa+\frac{1-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)} \times \\
\quad \times {}_3F_1\left(1,\, 1-\frac{\nu-\mu}{2},\, 1-\frac{\nu+\mu}{2};\, \frac{3-\nu}{2}+\varkappa;\, -\frac{1}{z}\right) + \\
\quad + \dfrac{z^{-\varkappa}e^{+z/2}}{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}-\varkappa\right)} \cdot {}_2F_0\left(\frac{1+\mu}{2}+\varkappa,\, \frac{1-\mu}{2}+\varkappa;\, +\frac{1}{z}\right) + \\
\quad + e^{\pm\pi i\left(\varkappa-\frac{1+\nu}{2}\right)} \dfrac{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}+\varkappa\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}+\varkappa\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}+\varkappa\right)} \cdot e^{-z/2}z^{+\varkappa} \times \\
\quad \times {}_2F_0\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa,\, \frac{1-\mu}{2}-\varkappa;\, -\frac{1}{z}\right) \\
\quad \text{oberes Vorzeichen: } -\frac{3\pi}{2} < \arg(z) < +\frac{\pi}{2}; \\
\quad \text{unteres Vorzeichen: } -\frac{\pi}{2} < \arg(z) < +\frac{3\pi}{2}.
\end{cases}
$$

Er gilt in demselben Sinne wie die Gl. (3) im ganzen Winkelbereich $|\arg(z)| < 3\pi/2$. In der Regel können aber darin, wie schon soeben auseinandergesetzt wurde, einzelne Glieder ganz fortgelassen werden, da sie in einzelnen kleineren Winkelbereichen infinitär kleiner sind.

Behält man in jedem der drei Glieder auf der rechten Seite von (4) nur das erste Entwicklungsglied bei und berücksichtigt die Definitionsgleichung 2.1 (4) der Funktion $S^{(\nu,2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$, so erhält man die übersichtlichere Darstellung:

$$
(4a)\quad
\begin{cases}
\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}+1\right)} \cdot {}_2F_2\left(1,\, \frac{\nu+1}{2}-\varkappa;\, \frac{\nu+\mu}{2}+1,\, \frac{\nu-\mu}{2}+1;\, z\right) \\
\quad \sim \dfrac{z^{-1}}{\left(\varkappa+\frac{1-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)} + \\
\quad + \dfrac{e^{+z}\cdot z^{-\varkappa-\frac{1+\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}-\varkappa\right)} + \dfrac{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}+\varkappa\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}+\varkappa\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}+\varkappa\right)} \cdot \left(z\cdot e^{\pm\pi i}\right)^{\varkappa-\frac{1+\nu}{2}} \\
\quad \left(z\to\infty\left(-\frac{3\pi}{2}+\delta,\, +\frac{3\pi}{2}-\delta\right)\right).
\end{cases}
$$

Für $\nu = \pm\mu$ geht sie in die bekannte asymptotische Entwicklung für die KUMMERsche Funktion $1/\Gamma(1+\mu)\cdot {}_1F_1\left(\frac{1}{2}+\mu - \varkappa, 1+\mu, z\right)$ über.

7. *Rücklaufformeln und Formeln für die Ableitung der Funktion* $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$. Ebenso wie bei den beiden parabolischen Funktionen $M_{\varkappa,\mu/2}(z)$ und $W_{\varkappa,\mu/2}(z)$ kann man auch bei den beiden hier behandelten Funktionen R und S Beziehungen zwischen sog. benachbarten Funktionen aufstellen, das sind Beziehungen, die in den Funktionen selbst linear und homogen sind und die für gewöhnlich drei von ihnen mit Unterschieden in den Zeigerwerten von der Größe einer halben oder einer ganzen Einheit miteinander in Verbindung bringen. Auch die Ableitungen von R nach z können auf diese Weise wiederum durch R-Funktionen mit gleichen und benachbarten Zeigerwerten dargestellt werden. Es versteht sich, daß bei drei Parametern in der Funktion eine große Zahl derartiger Relationen aufgestellt werden können. Es liegt uns jedoch hier nur daran, den Weg zu weisen, auf dem solche Formeln gewonnen werden können. Im übrigen werden wir uns auf die Angabe nur einiger weniger solcher Formeln beschränken.

Den einfachsten Zugang zu diesen Beziehungen gewährt die Integraldarstellung 3 (1). Multipliziert man sie etwa mit $e^{+z/2}\cdot z^{(\mu-1)/2}$ und differenziert sie p-mal nach z, so läßt sich hinterher der Integrand, wenn auch mit anderen Werten von ν, μ und $\varkappa$, leicht wieder über die Gl. 3 (1) mit einer R-Funktion in Übereinstimmung bringen. Auf diese Weise gewinnt man ohne Schwierigkeit die Formel

$$(1)\qquad \frac{d^p}{dz^p}\left\{e^{+z/2}\cdot z^{-\frac{1\mp\mu}{2}}\cdot R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)\right\} = z^{-\frac{1+p\mp\mu}{2}}\cdot e^{+z/2}\cdot R^{\left(\frac{\nu-p}{2}\right)}_{\varkappa-\frac{p}{2},\,\frac{\mu\mp p}{2}}(z)$$
$$(p = 0, 1, 2\ldots),$$

wenn man die oberen Vorzeichen wählt. Der Übergang von $+\mu$ zu $-\mu$ führt dann in Rücksicht auf die Gl. 3 (6) ohne weitere Rechnung zu der Formel (1) bei Wahl des unteren Vorzeichens.

Um noch einen größeren Spielraum zu haben, kann man für diese Zwecke statt 3 (1) auch eine etwas veränderte Integraldarstellung benutzen, zu der man von 3 (1) aus durch die Einführung der neuen Integrationsvariablen $s = t + (1+\nu)/2$ gelangt. In dem neuen Integral

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}+\varkappa\right)}{\pi^2}\cdot \sin\frac{\pi}{2}(\nu-\mu)\cdot\sin\frac{\pi}{2}(\nu+\mu)\times \\ \times \dfrac{e^{-z/2}}{2\pi i}\displaystyle\int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-s\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}-s\right)\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}-s\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}+s\right)}{\Gamma(1+\varkappa-s)} z^s\,ds \end{array}\right.$$

muß dann der Integrationsweg so geführt werden, daß er die in den Punkten $s = (1\pm\mu)/2$ und $s = (1+\nu)/2$ beginnenden und nach rechts strebenden Polketten stets zur Rechten hat. Differenziert man nun die Gl. (2) nach z, schreibt

für das dadurch im Integranden hinzutretende s identisch $(s-\varkappa)+\varkappa$ und beachtet, daß $(-s+\varkappa)/\Gamma(1+\varkappa-s)=1/\Gamma\left(1+(\varkappa-1)-s\right)$ ist, so ergibt der Vergleich mit (2) die Beziehung

$$(3)\qquad z\cdot\frac{d}{dz}R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)=\left(\varkappa-\frac{z}{2}\right)\cdot R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)-\left(\varkappa-\frac{1+\nu}{2}\right)\cdot R^{(\nu/2)}_{\varkappa-1,\,\mu/2}(z)\,.$$

Führt man die Differentiation in (1) und (2) für $p=1$ aus, so gelangt man zu der weiteren Formel

$$(4)\qquad z\cdot\frac{d}{dz}R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)=-\frac{1}{2}\,(z\pm\mu-1)\cdot R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)+z^{\frac{1}{2}}\cdot R^{(\nu-1)/2}_{\varkappa-\frac{1}{2},\,\frac{\mu\pm1}{2}}(z)\,.$$

Schließlich gehört auch noch die Formel

$$(5)\qquad R^{(\nu/2-1)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)=\left(\frac{\nu-1}{2}-\varkappa\right)\cdot R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)+e^{-z/2}\,z^{\frac{\nu-1}{2}}\Big/\left(\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)\right)$$

hierher, die für $p=1$ aus 3 (7a) hervorgeht. Die Beziehung

$$(6)\qquad (\mu+1)\,R^{(\nu-1)/2}_{\varkappa-\frac{1}{2},\,\frac{\mu+1}{2}}(z)+z^{\frac{1}{2}}\cdot\left\{\left(\varkappa-\frac{1+\mu}{2}\right)R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)-\left(\varkappa+\frac{1+\mu}{2}\right)R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\left(\frac{\mu}{2}+1\right)}(z)\right\}$$

läßt sich mit Hilfe von (2) sofort verifizieren, indem man mittels der Gl. (2) die in der geschweiften Klammer stehende Summe zweier R-Funktionen nachbildet. In Rücksicht auf die Gl. (1) für $p=1$ folgt dann aus (6) auch sofort die weitere Formel:

$$(7)\qquad (1\pm\mu)\cdot\frac{d}{dz}R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)=\left[\frac{(1\pm\mu)^2}{2z}-\varkappa\right]\cdot R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)-\left(\varkappa+\frac{1\pm\mu}{2}\right)\cdot R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\frac{\mu}{2}\pm1}(z)\,.$$

8. *Die Lösung nach der Methode der Variation der Konstanten.* Sind $y_1(z)$ und $y_2(z)$ zwei linear unabhängige Lösungen der zu 1 (1) gehörenden homogenen D.Gl., so läßt sich die Lösung $Y(z)$ der hier behandelten inhomogenen D.Gl. bekanntlich durch den Ausdruck

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} Y(z)=&-\frac{C}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)}\times\\ \times&\left\{y_1(z)\cdot\int_{z_0}^{z}e^{-t/2}\,t^{\frac{\nu-3}{2}}\,\frac{y_2(t)\cdot dt}{\mathfrak{W}\left[y_1(t),\,y_2(t)\right]}+y_2(t)\cdot\int_{z_0}^{z}e^{-t/2}\,t^{\frac{\nu-3}{2}}\cdot\frac{y_1(t)\cdot dt}{\mathfrak{W}\left[y_1(t),\,y_2(t)\right]}\right\}\end{aligned}\right.$$

darstellen, wenn darin $\mathfrak{W}\left[y_1(z),\,y_2(z)\right]$ die aus y_1 und y_2 gebildete WRONSKIsche Determinante bedeutet, die in der ersten Zeile die Funktionen y_1, y_2 selbst enthält und in der zweiten Zeile ihre Ableitungen nach t. Da nun die WHITTAKERsche D.Gl. die Normalform hat, so ist die WRONSKIsche Determinante im vorliegenden Falle von t unabhängig, und zwar hat sie im besonderen den Wert $1/\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa\right)$, wenn man $y_1(t)=W_{\varkappa,\,\mu/2}(t)$ und $y_2(t)=M_{\varkappa,\,\mu/2}(t)$ wählt. Bei dieser Bedeutung von y_1 und y_2 verschwindet überdies

das erste Integral in (1) in der Ordnung $z^{(\nu+\mu)/2}$ und das zweite wie $z^{(\nu+\mu)/2}$, die geschweifte Klammer selbst mithin in der Ordnung $z^{(1-\nu)/2}$. Unter der Voraussetzung $\Re(\nu \pm \mu) > 0$ kann demnach in den beiden Integralen der Gl. (1) $z_0 = 0$ gesetzt werden, und die durch (1) wiedergegebene Lösung der inhomogenen D.Gl. 1(1) kann sich daher von der Funktion $S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ im Hinblick auf die Gl. 2.1(4) nur um eine Konstante unterscheiden, deren Wert durch den Grenzübergang $z \to 0$ in (1) leicht ermittelt werden kann. Es ergibt sich also genauer für $S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ die Darstellung:

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} S^{(\nu,2)}_{\varkappa,\mu,2}(z) = {} & \frac{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)} \cdot \left\{ M_{\varkappa,\mu,2}(z) \cdot \int_0^z e^{-t/2}\, t^{\frac{\nu-3}{2}}\, W_{\varkappa,\mu/2}(t) \cdot dt - \right. \\ & \left. - W_{\varkappa,\mu/2}(t) \cdot \int_0^z e^{-t/2}\, t^{\frac{\nu-3}{2}}\, M_{\varkappa,\mu/2}(t)\, dt \right\} \\ & \left(\Re\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right) > 0,\ \frac{\mu+1}{2} - \varkappa \neq 0, -1, -2 \ldots \right). \end{aligned} \right.$$

Differenziert man diese Gleichung nach z und faßt in dem Gleichungspaar, das aus (2) und seiner Ableitung besteht, die beiden Integrale zwischen den Grenzen 0 und z als Unbekannte auf, so führt die stets mögliche Auflösung des Gleichungspaars nach diesen Unbekannten zu den beiden Gleichungen:

$$(3\,a)\quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^z e^{-t/2}\, t^{\frac{\nu-3}{2}} \cdot W_{\varkappa,\mu/2}(t) \cdot dt = \Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right) \times \\ & \qquad \times \left[W_{\varkappa,\mu/2}(z) \cdot \frac{d\, S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)}{dz} - W'_{\varkappa,\mu/2}(z) \cdot S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z) \right] \end{aligned} \right.$$

$$(3\,b)\quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^z e^{-t/2}\, t^{\frac{\nu-3}{2}} \cdot M_{\varkappa,\mu/2}(t) \cdot dt = \Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right) \times \\ & \qquad \times \left[M_{\varkappa,\mu/2}(z) \cdot \frac{d\, S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)}{dz} - M'_{\varkappa,\mu/2}(z) \cdot S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z) \right] \\ & \left(\Re\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right) > 0,\ \frac{\mu+1}{2} - \varkappa \neq 0, 1, 2 \ldots \right). \end{aligned} \right.$$

Die beiden links stehenden Integrale werden dadurch teils durch die Lösungen der homogenen, teils durch die der inhomogenen D.Gl. 1(1) dargestellt. Ersetzt man auf der rechten Seite dieses Gleichungspaars im Hinblick auf die zweite Form der Gl. 3(2) die Funktion $S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ durch $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$, so hat diese Maßnahme lediglich die Wirkung, daß in der eckigen Klammer von (3a) das Glied $-1/\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}-\varkappa\right)$ und von (3b) das Glied $\sin\frac{\pi}{2}(\nu-\mu)/\pi \cdot \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}+\varkappa\right)\Big/ \Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}+\varkappa\right)$ hinzutritt. Läßt man also in den Gl. (3a, b) die untere Grenze unbestimmt, so kann auf der rechten Seite jederzeit ohne weitere Änderung

der oben angegebene Ersatz von $S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ durch $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ vorgenommen werden. Berücksichtigt man dann noch die Gl. (7), (9) und (10a) des vorigen Abschnitts, so entsteht damit aus (3a, b) das Formelpaar:

$$(4a)\quad \begin{cases} \dfrac{1+\mu}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)} \int^{z} e^{-t/2}\, t^{\frac{\nu-3}{2}} \cdot W_{\varkappa,\mu/2}(t)\cdot dt \\ = \left(\dfrac{1+\mu}{2}+\varkappa\right)\cdot W_{\varkappa,\mu/2}(z)\, R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\frac{\mu}{2}+1}(z) + \left(\dfrac{1+\mu}{2}-\varkappa\right) W_{\varkappa,\frac{\mu}{2}+1}(z)\cdot R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z) \end{cases}$$

$$(4b)\quad \begin{cases} \dfrac{1+\mu}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)} \int^{z} e^{-t/2}\, t^{\frac{\nu-3}{2}} M_{\varkappa,\mu/2}(t)\cdot dt \\ = \left(\dfrac{1+\mu}{2}+\varkappa\right) M_{\varkappa,\mu/2}(z)\, R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\frac{\mu}{2}+1}(z) + \left(\varkappa^2-\left(\dfrac{1+\mu}{2}\right)^2\right) M_{\varkappa,\frac{\mu}{2}+1}(z)\cdot R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z). \end{cases}$$

Es drückt die beiden links stehenden unbestimmten Integrale durch eine Summe von Produkten aus den Lösungen der homogenen und der inhomogenen D.Gl. aus.

9. *Besondere Integraldarstellungen für die Funktionen* $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ *und* $S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$. Die hier als Lösung einer besonderen inhomogenen WHITTAKERschen D.Gl. eingeführte Funktion $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ tritt auch bei der Auswertung spezieller, aber doch recht allgemeiner Integrale vom Typus der Gleichung

$$(1)\quad \begin{cases} I(\gamma;\varkappa',\mu',\alpha;z) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t/2}\, t^{\gamma+\alpha-1}\cdot W_{\varkappa',\mu'/2}(t)\cdot \frac{dt}{(z+t)^{\alpha}} \\ \qquad\qquad = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t/2}\, t^{\gamma}\cdot W_{\varkappa',\mu'/2}(t)\cdot \left(1+\frac{z}{t}\right)^{-\alpha}\cdot \frac{dt}{t} \\ \left(|\arg(z)|<\pi, \qquad \Re\left(\gamma+\alpha+\frac{1\pm\mu'}{2}\right)>0\right) \end{cases}$$

auf, falls darin γ oder τ bestimmte, noch näher anzugebende Werte haben. Um zu erkennen, wie diese Werte zu wählen sind, verwandeln wir das vorgelegte Integral unter Zuhilfenahme der MELLIN-Transformation in ein Integral nach Art von 3 (1).

Nach der Theorie dieser Transformation[2]) besteht für einen geeignet zu wählenden Wert der Integrationsabszisse σ die Beziehung

$$(2)\qquad \int_0^{\infty} g(t)\, x\, f\left(\frac{z}{t}\right) x\, \frac{dt}{t} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \mathfrak{F}(s)\cdot \mathfrak{G}(s)\cdot z^{-s}\cdot ds\,.$$

$$(2a)\qquad \mathfrak{F}(s) = \int_0^{\infty} f(x)\, x^{s-1}\cdot dx\,,$$

[2]) Siehe z.B. TITCHMARSH, E. C.: Theory of Fourier Integrals. Oxford 1937.

falls $\mathfrak{F}(s)$ und $\mathfrak{G}(s)$ die gemäß (2a) definierten MELLIN-Transformierten der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ bedeuten. Wie ein Vergleich der linken Seite von (2) mit der rechten Seite von (1) erkennen läßt, sind demnach im vorliegenden Falle die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ durch die Gleichungen

$$(3\,a) \qquad f(x) = (1+x)^{-\alpha}, \qquad (3\,b) \qquad g(x) = e^{-x/2} \cdot x^{\gamma} \cdot W_{\varkappa', \mu'/2}(x)$$

gegeben. Nun ist aber bekanntlich

$$(4\,a) \qquad \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{(1+x)^{\alpha}} \cdot dx = \mathfrak{F}(s) = \frac{\Gamma(s)\,\Gamma(\alpha - s)}{\Gamma(\alpha)} \qquad (\Re(\alpha) > \Re(s) > 0)$$

$$(4\,b) \qquad \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{-x/2} x^{\gamma} W_{\varkappa', \mu'/2}(x) \cdot x^{s-1} \cdot dx = \mathfrak{G}(s) \\ = \dfrac{\Gamma\left(\gamma + s - \frac{1}{2} - \frac{\mu'}{2}\right)\Gamma\left(\gamma + s + \frac{1}{2} + \frac{\mu'}{2}\right)}{\Gamma(\gamma + s - \varkappa' + 1)} \qquad \left(\Re\left(\gamma + s + \frac{1 \pm \mu'}{2}\right) > 0\right) \end{cases}$$

und mithin hat man im Hinblick auf die Gl. (2) nach dem Übergang von s zu $-t$:

$$(5\,a) \qquad \begin{cases} \Gamma(\alpha) \cdot I(\gamma; \varkappa', \mu', \alpha; z) \\ = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{-\tau - i\infty}^{-\tau + i\infty} \frac{\Gamma(-t)\,\Gamma(\alpha + t)\,\Gamma\left(\gamma + \frac{1}{2} - \frac{\mu'}{2} - t\right)\Gamma\left(\gamma + \frac{1}{2} + \frac{\mu'}{2} - t\right)}{\Gamma(\gamma - \varkappa' - t + 1)} \cdot z^{t} \cdot dt \\ \left(|\arg(z)| < \frac{3\pi}{2}, \quad 0 < \tau < \Re(\alpha), \quad \Re\left(\gamma + \frac{1 + \mu'}{2}\right) > \tau\right). \end{cases}$$

Auf Grund der zu (5a) angegebenen Ungleichungen muß dabei der Integrationsweg die reelle t-Achse zwischen den Punkten $0 \ldots \Re(\alpha)$ und links von den beiden Punkten $\Re\left(\gamma - \frac{1 \pm \mu'}{2}\right)$ schneiden. Die Vorschrift über die Wegführung des Integrals in der Gl. (5a) und des daraus durch die Substitution $t = t' + \beta$ hervorgehenden Integrals

$$(5\,b) \qquad \begin{cases} \Gamma(\alpha) \cdot I(\gamma; \varkappa', \mu', \alpha; z) \\ = \dfrac{z^{\beta}}{2\pi i} \displaystyle\int_{-\tau' - i\infty}^{-\tau' + i\infty} \frac{\Gamma\left(\gamma - \beta + \frac{1}{2} - \frac{\mu'}{2} - t'\right)\Gamma\left(\gamma - \beta + \frac{1}{2} + \frac{\mu'}{2} - t'\right)\Gamma(-\beta - t')}{\Gamma(\gamma - \beta - \varkappa' - t' + 1)} \times \\ \times\, \Gamma(\alpha + \beta + t')\, z^{t'} \cdot dt' \end{cases}$$

läuft also auch hier darauf hinaus, daß die Integrationsbahn sämtliche Pole der drei nach rechts strebenden Polketten zur Rechten und sämtliche Pole der einen nach links strebenden Polkette zur Linken haben muß.

Vergleicht man nun das Integral (5b) mit dem Integral 7(2), so kann man zwischen beiden einmal dadurch eine Übereinstimmung erzielen, daß man setzt:

$$\frac{1+\nu}{2} = -\beta \qquad \frac{1-\nu}{2} = \alpha+\beta$$

$$\frac{1+\mu}{2} = \gamma-\beta+\frac{1+\mu'}{2} \qquad \frac{1-\mu}{2} = \gamma-\beta+\frac{1-\mu'}{2}.$$

Das erfordert die speziellen Werte: $\alpha=1$, $\gamma=\beta=-\frac{1+\nu}{2}$, $\mu'=\mu$ und $\varkappa'=-\varkappa$. Die Aussagen der Gl. (5b), (1) und 7(2) führen damit in diesem Falle zu der Beziehung:

$$(6)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty e^{-t/2}\, t^{-\frac{\nu+1}{2}}\, W_{-\varkappa,\,\mu/2}(t)\cdot\frac{dt}{t+z} \\ \displaystyle= \frac{\pi^2\cdot e^{z/2}\, z^{-\frac{1+\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}+\varkappa\right)\sin\frac{\pi}{2}(\nu-\mu)\sin\frac{\pi}{2}(\nu+\mu)}\cdot R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z) \qquad \left(\Re\left(\frac{\nu\mp\mu}{2}\right)<1\right). \end{cases}$$

Aus dieser Gleichung läßt sich noch eine andere bemerkenswerte Integraldarstellung für die Funktion $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ gewinnen. Setzt man nämlich unter dem Integralzeichen auf der linken Seite:

$$\frac{1}{t+z} = \int_0^\infty e^{-v(t+z)}\cdot dv \qquad (\Re(z)>0)$$

vertauscht danach die Reihenfolge der beiden Integrationen, was hier wegen der absoluten Konvergenz der Integrale statthaft ist, und macht dann von der bekannten Formel

$$(7)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha t}\, t^{\beta-1}\, W_{\varkappa,\,\mu/2}(t)\cdot dt \\ \displaystyle= \frac{\Gamma\left(\beta+\frac{1-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\beta+\frac{1+\mu}{2}\right)}{\Gamma(\beta-\varkappa+1)}\cdot {}_2F_1\left(\beta+\frac{1-\mu}{2},\,\beta+\frac{1+\mu}{2};\,\beta-\varkappa+1;\,\frac{1}{2}-\alpha\right) \\ \left(\Re\left(\beta+\frac{1\pm\mu}{2}\right)>0,\ \Re(\alpha)>-\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

Gebrauch, so ergibt sich ohne weiteres die Beziehung

$$(8)\quad \begin{cases} \displaystyle\frac{z^{(1+\nu)/2}}{\Gamma\left(\frac{3-\nu}{2}+\varkappa\right)}\cdot\int_0^\infty e^{-vz}\cdot {}_2F_1\left(1-\frac{\mu+\nu}{2},\,1-\frac{\nu-\mu}{2};\,\frac{3-\nu}{2}+\varkappa;\,-v\right)\cdot dv \\ \displaystyle= e^{z/2}-\frac{R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}+\varkappa\right)}. \end{cases}$$

Danach läßt sich die Funktion $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ *als die* LAPLACE-*Transformierte der* GAUSSschen *hypergeometrischen Funktion auffassen,* und zwar in dem allge-

meinen Falle, wo alle drei Parameter willkürlich wählbar sind. Für ein $\nu/2=\mu/2+p$ führt die Gl. (8) zu der früheren Gl. 3(4a) zurück.

Eine zweite Möglichkeit, das Integral (5b) mit dem von Gl. 7(2) in Übereinstimmung zu bringen, liegt bei gegebenen Werten von α oder γ, μ' und $\varkappa'$ in der folgenden Festsetzung vor:

$$-\beta=\frac{1+\mu}{2} \qquad \gamma-\beta+\frac{1-\mu'}{2}=\frac{1-\mu}{2}$$

$$\gamma-\beta+\frac{1+\mu'}{2}=\frac{1+\nu}{2} \qquad \alpha+\beta=\frac{1-\nu}{2} \qquad \gamma-\beta-\varkappa'=\varkappa.$$

Zwischen α und γ besteht demnach der Zusammenhang: $\alpha+\gamma=(1-\mu')/2$. Die weitere Durchrechnung liefert schließlich die Gleichung:

$$(9)\quad \begin{cases} \int\limits_0^\infty e^{-t/2}\cdot t^{-\frac{1+\mu}{2}} W_{\varkappa,\mu/2}(t)\cdot\dfrac{dt}{(t+z)^\alpha} \\ =\dfrac{\pi\cdot\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}-\varkappa\right)\cdot\sin(\pi\mu)}\cdot z^{-\frac{\alpha+\mu}{2}}\cdot e^{z/2}R^{(\mu-\alpha+1)/2}_{\frac{1-\alpha}{2}-\varkappa,\ \frac{\mu+\alpha-1}{2}}(z) \qquad \left(\Re(\mu)<1\right). \end{cases}$$

Für ein $\alpha\to 1$ versagt die Formel (9), und das gleiche gilt von der Formel (6), wenn $\nu\to\mu$ geht. Dieses Versagen ist aber im Hinblick auf die Gl. 3(4b) leicht zu beheben, indem man in (6) und (9) an Stelle der Funktion $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ die modifizierte Funktion $\mathfrak{R}^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ einführt, so daß sich also als gemeinsamer Grenzfall von (6) und (9) die Relation

$$(10)\quad \int\limits_0^\infty e^{-t/2}\,t^{-\frac{1+\mu}{2}}W_{\varkappa,\mu/2}(t)\cdot\frac{dt}{t+z}=\frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}+\varkappa\right)}e^{z/2}z^{-\frac{1+\mu}{2}}\cdot\mathfrak{R}^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z) \qquad \left(\Re(\mu)<1\right)$$

ergibt.

Bei beliebigen Werten von $\gamma, \alpha, \varkappa'$ und μ' liefert das Integral (1) durch Auflösung nach dem Residuensatz eine Beziehung, in der drei ${}_2F_2$-Funktionen auftreten. Dieser allgemeine Fall soll jedoch an dieser Stelle nicht weiter behandelt werden.

Die Integrale (6), (9) und (10) setzen die Funktion $W_{\varkappa,\mu/2}(z)$ in Beziehung zu $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$. Es steht daher zu erwarten, daß die entsprechenden Integrale mit der Funktion $M_{\varkappa,\mu/2}(z)$ auf die Funktion $S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ führen. Diese Vermutung findet sich in der Tat bestätigt. Um diese Frage zu klären, untersuchen wir das Integral

$$(11)\quad \begin{cases} K(\gamma;\varkappa',\mu',\alpha;z)=\int\limits_0^\infty e^{-t/2}\,t^{\gamma+\alpha-1}M_{\varkappa',\mu'/2}(t)\cdot\dfrac{dt}{(z+t)^\alpha} \\ \qquad\qquad\equiv\int\limits_0^\infty e^{-t/2}\,t^{\gamma}M_{\varkappa',\mu'/2}(t)\cdot\left(1+\dfrac{z}{t}\right)^{-\alpha}\cdot\dfrac{dt}{t} \\ \left(\Re(\gamma-\varkappa')<0,\quad \Re\left(\gamma+\alpha+\dfrac{1+\mu'}{2}\right)>0\right) \end{cases}$$

unter den dazu angegebenen Konvergenzbedingungen. Da im vorliegenden Falle $\mathfrak{G}(s)$ durch

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-x/2}\, x^{\gamma}\, M_{\varkappa',\mu'/2}(x)\cdot x^{s-1}\cdot dx \equiv \mathfrak{G}(s)\\ &\qquad = \frac{\Gamma(\varkappa'-\gamma-s)\,\Gamma\left(\frac{1+\mu'}{2}+\gamma+s\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\mu'}{2}+\varkappa'\right)\Gamma\left(\frac{1+\mu'}{2}-\gamma-s\right)}\\ &\left(\Re\left(\gamma+s+\frac{1+\mu'}{2}\right)>0,\quad \Re(\varkappa'-\gamma-s)>0\right)\end{aligned}\right.$$

gegeben ist, so hat das die Funktion K von (11) darstellende MELLIN-Integral jetzt die Gestalt:

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\Gamma(\alpha)\,\Gamma\left(\frac{1+\mu'}{2}+\varkappa'\right)\cdot K\,(\gamma;\varkappa',\mu',\alpha;z)\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\tau-i\infty}^{-\tau+i\infty}\Gamma(-t)\,\Gamma(\alpha+t)\cdot\frac{\Gamma(\varkappa'-\gamma+t)\,\Gamma\left(\frac{1+\mu'}{2}+\gamma-t\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\mu'}{2}-\gamma+t\right)}\cdot z^t\cdot dt\\ &\left(0<\tau<\Re(\alpha),\ \Re\left(\frac{1+\mu'}{2}+\gamma\right)<\tau<\Re(\varkappa'-\gamma)\right).\end{aligned}\right.$$

Der Integrationsweg verläuft hierin wiederum derart, daß er die nach rechts und die nach links strebenden Polketten voneinander trennt. Im übrigen konvergiert das Integral absolut für alle z eines endlichen Bereichs mit $|\arg(z)|<3\pi/2$.

Die Möglichkeiten, die für die Zurückführung der Funktion K auf die Funktion $S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ bestehen, übersieht man im vorliegenden Falle am einfachsten dadurch, daß man das rechtsstehende Integral nach dem Residuensatz in eine nach steigenden Potenzen von z fortschreitende Reihe entwickelt. Das führt nach einfachen Rechnungen auf die Entwicklung:

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-t/2}\, t^{\gamma+\alpha-1}\, M_{\varkappa',\mu'/2}(t)\cdot\frac{dt}{(z+t)^\alpha} = \frac{\Gamma\left(\frac{1+\mu'}{2}+\gamma\right)\Gamma(\varkappa'-\gamma)}{\Gamma\left(\frac{1+\mu'}{2}-\gamma\right)\Gamma\left(\frac{1+\mu'}{2}+\varkappa'\right)}\times\\ &\qquad\times {}_2F_2\left(\alpha,\varkappa'-\gamma;\ \frac{1+\mu'}{2}-\gamma,\frac{1-\mu'}{2}-\gamma;\ z\right)+\\ &\qquad+\frac{\Gamma\left(\alpha+\gamma+\frac{1+\mu'}{2}\right)\Gamma\left(-\gamma-\frac{1+\mu'}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1+\mu')}\cdot z^{\gamma+\frac{1+\mu'}{2}}\times\\ &\qquad\times {}_2F_2\left(\alpha+\gamma+\frac{1+\mu'}{2},\varkappa'+\frac{1+\mu'}{2};\ 1+\mu',\frac{3+\mu'}{2}+\gamma;\ z\right)\\ &\left(\Re(\gamma-\varkappa)<0,\ \Re\left(\gamma+\alpha+\frac{1+\mu'}{2}\right)>0\right).\end{aligned}\right.$$

Die erste der beiden rechts stehenden ${}_2F_2$-Funktionen geht nun in der Tat in die Gl. 2.1 (4) über, wenn man darin $\alpha=1$, $\gamma=-(\nu+1)/2$, $\mu=\mu'$ und

$\varkappa' = -\varkappa$ macht. Die zweite ${}_2F_2$-Funktion geht für dieselben Werte in eine ${}_1F_1$-Funktion über und läßt sich daher durch die Funktion $M_{\varkappa,\mu/2}(z)$ wiedergeben. Im ganzen erhält man daher:

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{l} \int\limits_0^\infty e^{-t/2}\, t^{-\frac{1+\nu}{2}}\, M_{-\varkappa,\mu/2}(t)\cdot\frac{1}{z+t}\cdot dt = -\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)e^{z/2}\times \\ \qquad \times z^{\frac{1-\mu}{2}}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}-\varkappa\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}-\varkappa\right)}\cdot S^{(\nu,2)}_{\varkappa,\mu/2}(z) - M_{\varkappa,\mu/2}(z)\right\} \\ \qquad \left(\Re\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)>-1,\ \Re(\varkappa)<\Re\left(\frac{\nu+1}{2}\right),\ |\arg(z)|<\pi\right). \end{array}\right.$$

Man kann die Gültigkeit von (15) erweitern, indem man statt des Linienintegrals ein Schleifenintegral verwendet. Die Gl. (15) geht dann in die Gleichung

$$(15\,a)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\infty(-\pi)}^{(0+)} e^{t/2}\, t^{-\frac{1+\nu}{2}}\cdot\frac{M_{\varkappa,\mu/2}(t)}{z-t}\cdot dt \\ \qquad = e^{+z/2}\cdot z^{-(1+\nu)/2}\left\{M_{\varkappa,\mu/2}(z) - \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}-\varkappa\right)}\cdot S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)\right\} \\ \qquad \left(\Re(\varkappa)<\Re\left(\frac{\nu+1}{2}\right);\ |\arg(z)|<\pi\right) \end{array}\right.$$

über. Läßt man den Integrationsweg von (15a) außer dem Punkt $t=0$ auch noch die Stelle $t=z$ umschlingen, so wird man schließlich für die Funktion $S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z)$ selbst zu der Darstellung

$$(15\,b)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\infty(-\pi)}^{(0+,\,z+)} e^{t/2}\cdot t^{-\frac{\nu+1}{2}}\cdot\frac{M_{\varkappa,\mu/2}(t)}{t-z}\,dt = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\varkappa\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}-\varkappa\right)}e^{z/2}z^{-\frac{1+\nu}{2}}\cdot S^{(\nu/2)}_{\varkappa,\mu/2}(z) \\ \qquad \left(\Re(\varkappa)<\Re\left(\frac{\nu+i}{2}\right),\qquad |\arg(z)|<\pi\right) \end{array}\right.$$

geführt.

Das Gegenstück zu Gl. (9) gibt die Gleichung

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} \int\limits_0^\infty e^{-t/2}\, t^{-\frac{1+\mu}{2}}\, M_{\varkappa,\mu/2}(t)\cdot\frac{dt}{(t+z)^\alpha} = \Gamma(1-\alpha)\,e^{z/2}z^{-\frac{\alpha+\mu}{2}}\times \\ \qquad \times\left\{\frac{\Gamma\left(\varkappa+\alpha-\frac{1-\mu}{2}\right)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}+\varkappa\right)}M_{\frac{1-\alpha}{2}-\varkappa,\frac{\alpha+\mu-1}{2}}(z) - S^{\left(\frac{1+\mu-\alpha}{2}\right)}_{\frac{1-\alpha}{2}-\varkappa,\frac{\alpha+\mu-1}{2}}(z)\right\} \\ \qquad \left(\Re\left(\varkappa+\alpha-\frac{1-\mu}{2}\right)>0,\qquad |\arg(z)|<\pi\right) \end{array}\right.$$

an. Setzt man schließlich noch in (14) $\gamma = \varkappa' - 1$, so erhält man die Formel:

$$(17)\quad \left\{ \int_0^\infty e^{-t/2}\, t^{\varkappa+\alpha-2} \cdot M_{\varkappa,\mu/2}(t) \cdot \frac{dt}{(z+t)^\alpha} = \Gamma\left(\frac{1-\mu}{2} - \varkappa\right) \cdot e^{z/2} \cdot z^{\varkappa-1} \times \right.$$
$$\left. \times \left\{ \frac{\Gamma\left(\alpha + \varkappa - \frac{1-\mu}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} M_{1-\varkappa-\alpha,\,\mu/2}(z) - S^{(\frac{1}{2}-\varkappa)}_{1-\varkappa-\alpha,\,\mu/2}(z) \right\} \right.$$

Die entsprechende Beziehung mit der Funktion $W_{\varkappa,\mu/2}(z)$ im Integranden, die durch die Formel

$$(18)\quad \left\{ \int_0^\infty e^{-t/2}\, t^{\varkappa+\alpha-2}\, W_{\varkappa,\mu/2}(t) \cdot \frac{dt}{(z+t)^\alpha} \right.$$
$$= \frac{\Gamma\left(\alpha + \varkappa - \frac{1-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\alpha + \varkappa - \frac{1+\mu}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \cdot W_{1-\varkappa-\alpha,\,\mu/2}(z)$$
$$\left. \left(\Re(\varkappa+\alpha) > \Re\left(\frac{1+\mu}{2}\right)\right) \right.$$

wiedergegeben wird, kann man aus (17) gewinnen, indem man sie mit $-\pi/\sin(\pi\mu) \cdot 1/\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2} - \varkappa\right)$ multipliziert und dazu die mit dem Faktor $\pi/\sin(\pi\mu) \cdot 1/\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2} - \varkappa\right)$ versehene Gl. (17) nach Übergang von $+\mu$ zu $-\mu$ hinzufügt. Diese Operation definiert nämlich die Funktion $W_{\varkappa,\mu/2}(z)$ durch die beiden Funktionen $M_{\varkappa,\pm\mu/2}(z)$. Dasselbe gilt nach Erweiterung mit einem jeweils geeigneten Faktor auf der rechten Seite von den Funktionen $M_{1-\varkappa-\alpha,\,\mu/2}(z)$.

10. *Der Zusammenhang mit der* LOMMELschen *Funktion.* Die beiden von LOMMEL eingeführten Funktionen

$$(1)\qquad s_{\nu-1,\mu}(z) = \frac{z^\nu}{(\nu-\mu)(\nu+\mu)} \cdot {}_1F_2\left(1;\ \frac{\nu-\mu}{2}+1,\ \frac{\nu+\mu}{2}+1;\ z\right)$$

$$(2)\quad \left\{ S_{\nu-1',\mu}(z) = s_{\nu-1,\mu}(z) + 2^{\nu-2}\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)\Big/\sin\pi\mu \times \right.$$
$$\left. \times \left\{ \sin\frac{\pi}{2}(\nu-\mu) \cdot J_{-\mu}(z) - \sin\frac{\pi}{2}(\nu+\mu)\, J_\mu(z) \right\} \right.$$

sind bekanntlich[3]) Lösungen der inhomogenen BESSELschen D.Gl.

$$(3)\qquad z^2 \cdot \frac{d^2y}{dz^2} + z \cdot \frac{dy}{dz} + (z^2 - \mu^2)\, y = z^\nu,$$

die ein Sonderfall der WHITTAKERschen D.Gl. 1 (1) ist. Andererseits ist bekannt, daß beispielsweise die Funktion $M_{\varkappa,\mu/2}(z)$ als die Nullpunktslösung

[3]) Siehe WATSON, G. N.: Theory of BESSEL-Functions. Cambridge 1922.

dieser D.Gl. aus der Nullpunktslösung $J_\mu(z)$ der BESSELschen D.Gl. durch die Integraloperation (4) erzeugt werden kann. Dabei kommt in (4) der Integrationsweg aus dem zwischen den Winkelhalbierenden des zweiten und

$$(4)\quad \begin{cases} M_{\varkappa,\,\mu/2}(z) = 1/\pi \cdot \Gamma\left(\dfrac{1-\mu}{2} + \varkappa\right) \cdot z^{1/2} \cdot e^{-z/2+\pi i \varkappa} \times \\ \qquad \times \displaystyle\int_{\infty(\pi-\Delta)}^{\infty(\Delta)} e^{-t^2} t^{-2\varkappa} J_\mu(-2it\sqrt{z}) \cdot dt \qquad \left(|\Delta| < \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

dritten Quadranten gelegenen Winkelbereich und läuft oberhalb des Nullpunktes der t-Ebene in dem Bereich zwischen den Winkelhalbierenden des ersten und vierten Quadranten ins Unendliche. Diese Tatsache legt es nahe, die Funktion $R^{(\nu,2)}_{\varkappa,\,\mu,2}(z)$ in ähnlicher Weise aus der LOMMELschen Funktion $S_{\nu-1,\,\mu}$ zu erzeugen. Das trifft nun in der Tat zu, und zwar ist ganz entsprechend

$$(5)\quad \begin{cases} R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu,2}(z) = \dfrac{2^{2-\nu}}{\pi} \cdot \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{1-\nu}{2} + \varkappa\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\nu+\mu}{2}\right)} z^{1,2}\, e^{-z/2+\pi i \varkappa} \times \\ \qquad \times \displaystyle\int_{\infty(\pi+\Delta)}^{\infty(\Delta)} e^{-t^2} t^{-2\varkappa} S_{\nu-1,\,\mu}(-2\,it\sqrt{z}) \cdot dt \qquad \left(|\Delta| < \frac{\pi}{4}\right). \end{cases}$$

Steht unter dem Integralzeichen die Funktion $s_{\nu-1,\,\mu}$ von Gl. (1), so gilt die Beziehung (5) in derselben Form mit dem einzigen Unterschied, daß links das Symbol $S^{(\nu\,2)}_{\varkappa,\,\mu,2}(z)$ auftritt. Die Richtigkeit von (5) läßt sich leicht nachweisen, indem man die obige Gl. (4) und die Relation

$$(6)\quad \int_{\infty(\Delta+\pi)}^{\infty(\Delta)} e^{-t^2} \cdot t^{2\varrho} \cdot dt = \pi \cdot e^{+\pi i \varrho}/\Gamma(\tfrac{1}{2} - \varrho) \qquad (|\Delta| < \pi/4)$$

berücksichtigt. Man wird dann unmittelbar zu der ersten Form von Gl. 3 (2) geführt.

Dieser Zusammenhang läßt sich in bequemer Weise[4]) dazu benutzen, die große Zahl von Beziehungen, die für die LOMMELsche Funktion bereits bekannt sind, in entsprechende Beziehungen für die Funktion $R^{(\nu/2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ zu übersetzen. So folgt z.B. aus der NEUMANNschen Reihe für die Funktion $s_{\nu-1,\,\mu}(z)$, die man bei N. NIELSEN[5]) findet, durch Anwendung der Integraloperation sofort

[4]) Hiervon hat besonders ausgiebig A. ERDELYI in seinen Arbeiten über die WHITTAKER-Funktionen Gebrauch gemacht.

[5]) NIELSEN, N.: Handbuch der Zylinderfunktionen. Leipzig 1904.

die Entwicklung

$$(7)\qquad \left\{ \begin{aligned} S^{\nu/2}_{\varkappa,\,\mu/2}(z) = {} & \frac{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}+\varkappa\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}+\varkappa\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)} \times \\ & \times \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(\nu+2\lambda)\,\Gamma(\nu+\lambda)}{\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\lambda\right)\left(\frac{\nu-\mu}{2}+\lambda\right)\cdot\lambda!}\, M_{\varkappa,\,(\nu/2)+\lambda}(z)\,, \end{aligned} \right.$$

die die Funktion $S^{(\nu,2)}_{\varkappa,\,\mu/2}(z)$ durch eine unendliche Reihe von $M_{\varkappa,\,\nu/2}(z)$-Funktionen darstellt, deren zweiter Parameter von Glied zu Glied um die Einheit wächst. Da für ein $\lambda \to \infty$

$$\lim_{\lambda\to\infty} M_{\varkappa,\,(\nu/2)+\lambda}(z) \to z^{(1+\nu)/2+\lambda}/\Gamma(1+\nu+2\lambda)$$

strebt, so konvergiert die Reihe (7) absolut für alle endlichen Werte von z und in jedem Winkelbereich von z.

Darmstadt, Bruststr. 49.

(Eingegangen am 15. Juli 1952.)

Rund, H.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 193—210 (1953)

The Theory of Subspaces of a Finsler Space.
Part II[1]).

By
Hanno Rund.

In Part I we consider an m-dimensional subspace F_m of a Finsler space F_n represented parametrically by the set of equations (2.4): $x^i = x^i(u^\alpha)$[2]). The relations between the Minkowskian tangent spaces T_m and T'_m are discussed[3]) and are found to be exactly analogous to those between T_n and T'_n. The covariant derivative $\overline{D}U^\alpha/Ds$ with respect to the metric $\overline{g}_{\alpha\beta}$ of F_m of a vector-field X^i (or U^α) of F_m is defined analogously to the covariant derivative DX^i/Ds with respect to the metric g_{ij} of F_n[4]), thus retaining the property that the geodesics of F_m are the autoparallel curves of F_m (i.e. their tangent vectors u'^α satisfy $\overline{D}u'^\alpha/Ds = 0$[4]). We derived the general relation

$$g_{ij}(x, x')\frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{DX^i}{Ds} = \overline{g}_{\alpha\beta}(u, u')\frac{\overline{D}U^\beta}{Ds}, \tag{3.16}$$

where the x'^i (or u'^α) are the components of the tangent vector of the curve of F_m along which the process of covariant differentiation is taking place. When x' is an arbitrary direction in F_m at the point A of F_m, we say that the vector $n^{*i}(x, x')$ is normal to F_m with respect to the direction x' if it satisfies the m relations

$$g_{ij}(x, x')\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\cdot n^{*j}(x, x') = 0. \tag{4.1}$$

On the other hand, the unit vectors n^i satisfying

$$g_{ij}(x, n)\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\cdot n^j = 0 \tag{4.2}$$

are simply called unit normal vectors of F_m. In the case of a hypersurface, when we consider the totality tangential directions of F_{n-1} at A, equation (4.1) provides us with a cone of directions, which we call the *normal cone*, while (4.2) defines a single uniquely defined normal vector. It will be seen in the present paper that the latter shares with the normal cone those properties usually attributed to the normal vector of a surface. This indicates one of many interesting deviations from euclidean differential geometry, as

[1]) This paper is a direct continuation of Part I, which appeared in this journal, vol. **56** (1952) 363—375; but with the aid of the introductory note it can be read independently.

[2]) Latin indices run from 1 to n, Greek indices from 1 to m. The usual summation convention is employed.

[3]) Cf. [*I*], § 1. Numbers in square brackets refer to the bibliography at the end.

[4]) Cf. [*I*], § 5 and § 5 of the present paper.

in the latter case our normal vector and normal cone reduce to the single usual normal vector. In particular, *this enables us to distinguish precisely those properties of the normal vector to a surface in euclidean differential geometry which are specific consequences of the euclidean structure of the metric.*

If we denote the components of $\bar{D}U^\beta/Ds$ with respect to F_n by

$$\frac{\delta X^i}{\delta s} = \frac{\bar{D}U^\beta}{Ds} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial u^\beta}, \tag{4.5}$$

it is shown that (3.16) may be written in the form

$$\frac{DX^i}{Ds} = \sum_{p=m+1}^{n} \lambda_{(p)}(x, x', X) \cdot n^{*i}_{(p)}(x, x') + \frac{\delta X^i}{\delta s}, \tag{4.7}$$

where the $n^{*i}_{(p)}$ are $(n-m)$ independent vectors satisfying (4.1) and the $\lambda_{(p)}(x, x', X)$ are $(n-m)$ scalar factors which we shall evaluate explicitly in this paper (§ 8).

§ 5. Relative Curvature of Curves.

Although we have already discussed briefly the curvature of curves in a previous paper ([1], § 6) we shall treat this problem for the sake of future applications from a broader point of view, namely by the introduction of the notion of relative curvature of two curves[5]). Let us consider two continous differentiable curves C, C^*:

$$C: x^i = x^i(s); \quad C^*: x^{*i} = x^{*i}(s) \tag{5.1}$$

of our Finsler space such that C is tangent to C^* at a point 0 with coordinates $x^i_{(0)}$. Thus $x^i_{(0)} = x^{*i}_{(0)}$, $x'^i_{(0)} = x'^{*i}_{(0)}$, the dash denoting differentiation with respect to the arclength s. The vector $x'^i(s)$ is regarded as the tangent vector to C, and since by definition it is a unit vector

$$\frac{D}{Ds}[g_{ij}(x, x')\, x'^i\, x'^j] = 0, \tag{5.2}$$

where the symbol D denotes covariant differentiation along the curve. From the elementary properties of this operator (cf. [1], §§ 4–5) we deduce

$$g_{ij}(x, x')\, x'^i \frac{Dx'^j}{Ds} = 0, \tag{5.3}$$

so that the vector Dx'^j/Ds is orthogonal with respect to the tangent vector of C. We thus regard this vector as the *normal vector* to C. According to the definition of the covariant derivative (cf. [1], § 5)

$$\frac{Dx'^i}{Ds} = \frac{dx'^i}{ds} + P^i_{hk}(x, x') \cdot x'^h \cdot x'^k, \tag{5.4}$$

where

$$P^i_{hk}(x, x') \left\{ \begin{matrix} i \\ h\,k \end{matrix} \right\}_{(x, x')} - \frac{1}{2} g^{im}(x, x') \frac{\partial g_{hm}(x, x')}{\partial x'^l} \left\{ \begin{matrix} l \\ j\,k \end{matrix} \right\}_{(x, x')} x'^j. \tag{5.5}$$

[5]) This notion is discussed for the case of a Riemannian space by LIPKA [2].

In this particular case the last term in the last factor of (5.4) would vanish identically since the $g_{ij}(x, x')$ are homogeneous of degree zero with respect to the x'. Of course similar formulae will hold for C^*. Now the angle $D\Theta(C, C^*)$ [measured on the indicatrix in $T_n(0)$ [6])] between successive tangents of C and C^* at points both distant Ds from 0 is defined to be the angle between the vectors $x'^i_{(0)} + Dx'^i$, $x^{*'i}_{(0)} + Dx^{*'i}$. From (5.3) it follows that the latter are still unit vectors, so that their end-points B, C lie on the indicatrix in $T_n(0)$. If the end-point of the unit vector $x'^i_{(0)}$ is A, ABC will represent a small "triangular" section on the indicatrix; $D\Theta(C, C^*)$ will then by definition be the arc-length of BC, i.e. the length of the infinitesimal vector $|Dx'^i - Dx^{*'i}|$. We now define the *relative curvature* of C und C^* by

$$K(C, C^*) = \frac{D\Theta(C, C^*)}{Ds}, \tag{5.6}$$

so that

$$K^2(C, C^*) = g_{ij}\left(x_{(0)}, \frac{Dx'}{Ds} - \frac{Dx^{*'}}{Ds}\right)\left(\frac{Dx'^i}{Ds} - \frac{Dx^{*'i}}{Ds}\right)\left(\frac{Dx'^j}{Ds} - \frac{Dx^{*'j}}{Ds}\right). \tag{5.7}$$

We note that this notion is completely symmetrical in C and C^*. From (5.3) and the corresponding equation for C^* it follows that the vector $Dx'^i/Ds - Dx^{*'i}/Ds$ is orthogonal with respect to the common tangent vector of C and C^* at the point 0; we thus call it the *relative normal vector*. Hence the geometrical definition (5.6) also implies that *the relative curvature is equal to the length of the relative normal vector.*

However, our definition admits a further geometrical interpretation, which will be of fundamental importance to our later developments. Let P, H be two points of C, C^* respectively, both distant δs (measured along C, C^*) from 0. If x^i, x^{*i} are the coordinates of P and H respectively, we have since C is tangent to C^* at 0,

$$\left\{\begin{aligned} z^i \equiv x^i - x^{*i} &= \frac{1}{2}\left(\frac{dx'^i_{(0)}}{ds} - \frac{dx^{*'i}_{(0)}}{ds}\right)\delta s^2 + \cdots \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{Dx'^i}{Ds} - P^i_{hk}(x_{(0)}, x'_{(0)}) \cdot x'^h_{(0)} \cdot x'^k_{(0)} - \frac{dx^{*'i}_{(0)}}{ds}\right)\delta s^2 + \cdots, \end{aligned}\right. \tag{5.8}$$

by (5.4), and therefore we deduce from the corresponding equations for C^*

$$z^i \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{Dx'^i}{Ds} - \frac{Dx^{*'i}}{Ds}\right)\delta s^2 + \cdots. \tag{5.9}$$

When we disregard terms of the order δs^3 it follows that the z^i may be regarded as the components of a vector in $T_n(0)$ which represents the infinitesimal displacement HP. The direction of this vector coincides with that of the relative normal, *so that in the limit HP is orthogonal with respect to both C and C^*.* Hence $K(C, C^*)$ may be interpreted geometrically with the aid of

[6]) We use our definition of angle as given in [3], § 2. It is measured on the indicatrix in a manner exactly analogous to the measure of angle on the unit circle in euclidean geometry.

the length of $|HP|$; for, by (5.7) and (5.9) we have

$$K(C, C^*) = \lim_{\delta s \to 0} \frac{2|HP|}{\delta s^2}. \tag{5.10}$$

For the particular case that C^* is replaced by a geodesic Γ, the covariant derivative $Dx^{*\prime i}/Ds$ would be zero[7]), and equations (5.6) — (5.10) reduce to precisely those equations which we had deduced earlier for our ordinary curvature $\varrho^{-1}(C) = K(C, \Gamma)$ of a curve in Finsler space (cf. [1], § 6). It is interesting to note that these same concepts can be introduced without reference to geodesics. We shall call $K(C, \Gamma) = K(C)$ simply the curvature of C. Geodesics are curves of zero curvature.

In a Minkowskian space the normal vector to C at 0 is simply $x''^i_{(0)}$ (cf. [3], § 3) and the relative Minkowskian curvature $K_M(C, C^*)$ may be defined as above with analogous properties. Regarding, for the moment, C and Γ as curves in the Minkowskian tangent space $T_n(0)$ we would have from the equation corresponding to (5.7)

$$K_M^2(C, \Gamma) = g_{ij}(x_{(0)}, x''_{(0)} - x^{*\prime\prime}_{(0)}) \cdot (x''^i_{(0)} - x^{*\prime\prime i}_{(0)}) \cdot (x''^j_{(0)} - x^{*\prime\prime j}_{(0)}). \tag{5.11}$$

Comparing (5.8) and (5.9) we see that this reduces to

$$K_M^2(C, \Gamma) = g_{ij}\left(x_{(0)}, \frac{Dx'}{Ds}\right) \cdot \frac{Dx'^i}{Ds} \cdot \frac{Dx'^j}{Ds} = K^2(C) \tag{5.12}$$

in virtue of (5.7) and the fact that Γ is a geodesic. Thus we have the following result: *The curvature $K(C)$ of a curve C of F_n at 0 is equal to the relative Minkowskian curvature of C and Γ* (where Γ is the geodesic of F_n touching C at 0) *when regarded as curves in $T_n(0)$.*

Note. BUSEMANN defined a geodesic curvature $\varkappa_g$ of curves in two-dimensional Finsler spaces ([4], p. 285) and a Minkowskian curvature $\varkappa_M$ of curves in Minkowskian spaces ([5], (41)). Although his definitions are different to those given in the present paper, it is illuminating to contrast our last result with a corresponding property of $\varkappa_g$ and $\varkappa_M$, namely: "$\varkappa_g(C)$ of a curve C at a point P equals the difference of $\varkappa_M(C)$ of C as a curve in the local Minkowskian geometry at P [i.e. in $T_n(P)$] and the curvature $\varkappa_M(\Gamma)$ of the geodesic Γ tangent to C at P also as a curve in $T_n(P)$" ([4], p. 286).

For the case $n = 2$, the vectors $x''_{(0)}$, $x^{*\prime\prime}_{(0)}$ coincide, and it is consequently easy to verify with the aid of (5.11) that our definition of curvature will enjoy the same property.

§ 6. Curves on Hypersurfaces.

In order to arrive in a natural and purely geometrical manner at the fundamental notions (such as the second fundamental form and principal directions of curvature) on which the theory of subspaces is based we shall restrict the discussion of this and the following sections to the case of hyper-

[7]) This is the condition for the property of autoparallelism which is satisfied by geodesics. Cf. [1], § 5.

urfaces, about which we make the usual differentiability assumptions. The ain in geometrical clarity resulting from this procedure amply offsets the oss of generality, especially as we shall derive the corresponding formal xpressions for other subspaces in a later section.

At each point $P(x^k)$ of our hypersurface F_{n-1} there exists a uniquely lefined unit normal vector $n^i(x^k)$. By (4.2) the covariant components n_i of his vector satisfy the relation

$$n_i\,dx^i = 0 \tag{6.1}$$

or all displacements dx^i on F_{n-1}. Let $Q(x^i + dx^i)$ be a point of F_{n-1}; the ormal vector at Q will be given by

$$n_i + dn_i = n_i + \frac{\partial n_i}{\partial x^k}\,dx^k. \tag{6.2}$$

We can construct also a vector $n_i + d^*n_i$ at Q by displacing n_i parallel to tself from P to Q. Naturally the deviation of the latter vector and (6.2) rom each other give us some measure of "curvature" of F_{n-1} when we proceed rom P to Q along some curve C

$$x^i = x^i(s) \tag{6.3}$$

n the hypersurface. By considering the totality of such infinitesimal dis-lacements PQ from P on F_{n-1} we can make some preliminary analysis of he curvature of F_{n-1} in the neighbourhood of P. Let x'^i, $x'^i + dx'^i$ be the nit tangent vectors to C at P, Q respectively. By (6.1) the latter will be rthogonal with respect to the vector (6.2), so that for our purposes it is na-ural to evaluate the quantity

$$d\varphi(Q) = \cos(n + d^*n,\ x' + dx') = \frac{(n_i + d^*n_i)(x'^i + dx'^i)}{|n + d^*n| \cdot |x' + dx'|}. \tag{6.4}$$

Denoting by $n^i + d^*n^i$ the vector of $T_n(Q)$ corresponding to $n_i + d^*n_i$ of $T'_n(Q)$ (which in Finsler spaces does not necessarily imply that d^*n^i is the contravariant component of d^*n_i) we have

$$n^i + d^*n^i = g^{ik}(x + dx,\ n + d^*n)\cdot(n_k + d^*n_k)$$

$$= g^{ik}(x, n)\cdot n_k + \frac{\partial g^{ik}(x, n)}{\partial x^j}\,n_k\cdot dx^j + \frac{\partial g^{ik}(x, n)}{\partial n_j}\,n_k\,d^*n_j + g^{ik}(x, n)\cdot d^*n_k$$

when we neglect quantities of the second order. The third term on the right-hand side vanishes identically due to the homogeneity properties of the g^{ik}, so that

$$d^*n^i = \frac{\partial g^{ik}(x, n)}{\partial x^j}\,n_k\,dx^j + g^{ik}(x, n)\cdot d^*n_k. \tag{6.5}$$

But since n_i is a unit vector along C

$$\frac{\partial g^{ik}(x, n)}{\partial x^j}\,n_i\,n_k\,dx^j + \frac{\partial g^{ik}(x, n)}{\partial n_h}\,n_i\,n_k\cdot dn_h + 2g^{ik}(x, n)\cdot n_i\,dn_k = 0,$$

where dn_k is given by (6.2). Again the middle term vanishes in virtue of the homogeneity of g^{ik}. Hence it follows from (6.5) that

$$n_i d^* n^i = -2n^i dn_i + n^i d^* n_i, \tag{6.6}$$

neglecting quantities of the second order. Thus, to the same degree of approximation we have

$$|n + d^*n| = [(n_i + d^*n_i)(n^i + d^*n^i)]^{\frac{1}{2}} = [1 + 2n^i (d^*n_i - dn_i)]^{\frac{1}{2}},$$

or

$$|n + d^*n|^{-1} = 1 - n^i (d^*n_i - dn_i). \tag{6.7}$$

Also, differentiating (6.1) we have

$$dn_i \cdot x'^i + n_i dx'^i = 0,$$

so that the numerator in (6.4) is simply

$$(d^*n_i - dn_i) x'^i,$$

when we take into account (6.1) once more. Remembering that $x'^i + dx'^i$ is a unit vector, it follows from (6.4) and (6.7) that we finally have

$$d\varphi(Q) = (d^*n_i - dn_i) x'^i \tag{6.8}$$

where we still neglect quantities of the second order.

But, since $n_i + d^*n_i$ is obtained from n_i by parallel displacement, it follows that d^*n_i is given (cf. [1], p. 123) by

$$d^*n_i - P^h_{ik}(x, x') \cdot n_h dx^k = 0. \tag{6.9}$$

If we now denote by D the symbol of covariant differentiation along C, we have

$$Dn_i = dn_i - P^h_{ik}(x, x') n_h dx^k. \tag{6.10}$$

Using (6.9) and (6.10) equation (6.8) becomes

$$\frac{d\varphi}{ds} = -x'^i \left(\frac{Dn_i}{Ds}\right). \tag{6.11}$$

If we differentiate (6.1) covariantly along C, we find

$$\frac{Dx'^i}{Ds} n_i = -x'^i \frac{Dn_i}{Ds}. \tag{6.12}$$

Also, if we denote by ϱ_C^{-1} the curvature of C (regarded as a curve of the enveloping space F_n) we have, using (5.7)

$$\cos\left(n, \frac{Dx'}{Ds}\right) = \left(n_i \frac{Dx'^i}{Ds}\right) \varrho_C \tag{6.13}$$

since n^i is a unit vector. Combining (6.11), (6.12) and (6.13) we obtain

$$\frac{d\varphi}{ds} = n_i \frac{Dx'^i}{Ds} = \frac{\cos\left(n, \frac{Dx'}{Ds}\right)}{\varrho_C}. \tag{6.14}$$

Here it is of importance to notice that by definition $d\varphi$ depends solely on the points P, Q of our hypersurface, so that the quantities (6.14) are the same for any curve C of F_{n-1} passing through P and Q (i.e. having the same tangent x' at P). Putting $d\varphi/ds = R^{-1}(x, x')$ we may write (6.14) in the form

$$\frac{\cos\left(n, \frac{Dx'}{Ds}\right)}{\varrho_C} = \frac{1}{R(x, x')}. \tag{6.15}$$

Obviously $R^{-1}(x, x')$ is the curvature of that curve of F_{n-1} (with tangent vector x') whose normal vector Dx'/Ds coincides with the normal to F_{n-1}. It is natural, therefore, to define the *normal curvature* of F_{n-1} at P for the direction x' by $R^{-1}(x, x')$. Then, since (6.15) is true for all curves of F_{n-1} touching at P, we see that this equation represents the *generalisation of Meusnier's Theorem.*

§ 7. The second fundamental form.

Having defined the normal curvature at a point P of F_{n-1} for any direction the problem of immediate interest is to discover those directions at P for which $R(x, x')$ (or $d\varphi/ds$) assumes extreme values. For this purpose we shall introduce the second fundamental form as follows: We may write (6.11) in the form

$$\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{Dn_i}{Dx^j}\, x'^j\, x'^i. \tag{7.1}$$

In order to obtain coefficients of the latter quadratic form which are symmetrical in the indices i and j we put

$$\begin{aligned} \Omega_{ij}(x, x') = &-\frac{1}{2}\left(\frac{Dn_i}{Dx^j} + \frac{Dn_j}{Dx^i}\right) - \frac{1}{4} g^{mp}(x, x')\, x'^h n_p \times \\ &\times \left[\frac{\partial g_{mj}(x, x')}{\partial x'^k} \left\{ \begin{matrix} k \\ h\ i \end{matrix} \right\}_{(x, x')} + \frac{\partial g_{mi}(x, x')}{\partial x'^k} \left\{ \begin{matrix} k \\ h\ j \end{matrix} \right\}_{(x, x')}\right] \end{aligned} \tag{7.2}$$

so that Ω_{ij} is a symmetrical covariant tensor of rank two[8]). From (6.14) and (6.12) we then deduce

$$\frac{1}{R(x, x')} = \frac{\Omega_{ij}(x, x')\, dx^i\, dx^j}{g_{ij}(x, x')\, dx^i\, dx^j}, \tag{7.3}$$

where the dx^i represent a displacement on F_{n-1} in accordance with the corresponding classical result. The numerator on the right-hand side of (7.3) is then the second fundamental form. Our problem thus reduces at first sight to that of finding extreme values of the denominator of the right-hand side of (7.3) subject to the condition that the numerator remains constant. Since, however, Ω_{ij} is a function of direction this procedure leads to somewhat complicated analytical results of little geometrical interest. On the other

[8]) Note that either the first or the second expression inside the square bracket vanishes when (7.2) is multiplied by x'^j or x'^i respectively. The tensor character of Ω_{ij} is established by means of a difficult calculation; compare however footnote 10.

hand, we could follow a method due to BERWALD[9]) in his treatment of a similar problem (for the case $n=3$), a practice which has been followed by later authors. This consists of selecting an arbitrary fixed direction $x'^i_{(0)}$ tangential to F_{n-1} at P, and evaluating the extreme values of $g_{ij}(x, x'_{(0)})\,dx^i\,dx^j$ subject to the condition $\Omega_{ij}(x, x'_{(0)})\,dx^i\,dx^j = \text{constant}$, where the dx^i represent a displacement tangential to F_{n-1}. Geometrically this means forming the "osculating Dupin indicatrix", i.e. that $(n-2)$-dimensional quadric surface touching the surface $\Omega_{ij}(x, x')\,dx^i\,dx^j = \text{constant}$ in $T_n(P)$ at the point where the vector $x'_{(0)}$ cuts the latter surface. Since we have then only to deal with a quadric surface it is obvious that we obtain $(n-1)$ mutually orthogonal directions [orthogonality being defined with respect to $g_{ij}(x, x'_{(0)})$] which determine the required extreme values of $R(x, x')$. Clearly then such a specialisation implies simply a return to the classical state of affairs. When the totality of directions $x'_{(0)}$ is considered, each one of these determines $(n-1)$ "principal" directions with respect to each $x'_{(0)}$, and conversely we might expect any direction on the surface to be a principal direction with respect to one or more directions tangent to F_{n-1}. From a purely geometrical point of view one should expect a principal direction to represent something much more *unique* compared to other directions, and certainly one would require it to be independent of the original arbitrary choice of some direction such as $x'_{(0)}$. We shall therefore approach this problem from an entirely different angle by refining the notion of normal curvature.

In Part I, equation (4.7), we saw that if X^i is the tangent vector x'^i to a curve C of F_{n-1} we have

$$\frac{Dx'^i}{Ds} = \lambda(x, x')\,n^{*i}(x, x') + \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{\bar{D}u'^\alpha}{Ds}, \tag{7.4}$$

where u'^α is given by

$$x'^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}u'^\alpha. \tag{7.5}$$

In particular, if C is a *geodesic of* F_{n-1} (i.e. $\bar{D}u'^\alpha/Ds = 0$), it follows from (7.4) that $\lambda(x, x')$, being the length of the normal vector with respect to F_n of C represents the curvature $K(C)$ or $\varrho_c^{-1}(x, x')$ of C regarded as a curve in F_n. But by Meusnier's Theorem (6.15) we see that

$$\varrho_c(x, x') = R(x, x')\cos\left(n, n^*(x, x')\right), \tag{7.6}$$

since, by (7.4) the normal vector of C coincides with the normal vector $n^{*i}(x, x')$ of F_{n-1} with respect to the direction x'^i. Consequently we put

$$R^*(x, x') = R(x, x')\cos\left(n, n^*(x, x')\right), \tag{7.7}$$

and we shall call $R^{*-1}(x, x')$ the *secondary normal curvature* of F_{n-1} at P for the direction x'. Hence from (7.6) we have the result: *The curvature of a*

[9]) [6]. We may point out that BERWALD's definition of the second fundamental form is alltogether different from ours; also he employs CARTAN's covariant derivative involving the notion of element of support.

eodesic of F_{n-1} regarded as a curve of F_n is equal to the secondary normal cur-ature of F_{n-1} in the direction of the geodesic. We note that λ in (7.4) is given by

7.8) $$\lambda(x, x') = [R^*(x, x')]^{-1}.$$

Now to each geodesic Γ of F_{n-1} through P we associate the geodesic $\overline{\Gamma}$ f F_n tangent to F_{n-1} at P and having the same tangent vector at P. The atter geodesics form (at least in a small neighbourhood of P) a hypersurface F^*_{n-1}. In the neighbourhood of P we can map each $\overline{\Gamma}$ on its corresponding ' by assigning to each point H of Γ with arc-length $PH = \delta s$ a point H' f $\overline{\Gamma}$ with arclength $PH' = \delta s$ (measured along $\overline{\Gamma}$). As we shall consider nly small values of δs we may regard HH' as an infinitesimal vector z^i. The unit vector in the direction of z^i we denote by $N^{*i}(x, x', \delta s)$ where x' s, as before, the tangent to Γ and $\overline{\Gamma}$ at P. From the results of § 5 and (7.4) ve immediately deduce

7.9) $$\lim_{\delta s \to 0} N^{*i}(x, x', \delta s) = n^{*i}(x, x').$$

From (5.10) we also obtain

$$K(\Gamma, \overline{\Gamma}) = \lim_{\delta s \to 0} \frac{2 z_i N^{*i}(x, x')}{\delta s^2}$$

r, using (7.8),

7.10) $$z_i N^{*i}(x, x') = \frac{\delta s^2}{2R^*(x, x')} + 0(\delta s^3).$$

Let us now choose our coordinate system in the immediate neighbourhood f P such that P is the origin and F^*_{n-1} is represented by the equation $x_n = 0$, he values of x_n being the length of the geodesics joining corresponding points H and H'. These geodesics are well-defined at each point H' of F^*_{n-1} except or $\delta s = 0$: there we have a cone of directions; by (7.9) we deduce that this s simply our normal cone. However, this does not matter since $x_n = 0$ for $\delta s = 0$ independently of the directions x' through P. The equation to our ypersurface may now be written in the form

7.11) $$x_n = x_n(x^\alpha), \qquad (\alpha = 1, \ldots, n-1).$$

From (7.10) we see that $x_n(x^\alpha)$ has a stationary value at $x^\alpha = 0$; and since $_n(x^\alpha) = 0$ at that point, we have

$$x_n(\delta x^\alpha) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x_n(0)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \delta x^\alpha \delta x^\beta + \cdots$$

by Taylor's Theorem, where δx^α are the coordinates of H. By definition this s equal to the right-hand side of (7.10), so that

$$\frac{\delta s^2}{2R^*(x, x')} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x_n(0)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \delta x^\alpha \delta x^\beta$$

r, passing to the limit $\delta s \to 0$,

7.12) $$[R^*(x, x')]^{-1} = \frac{\partial^2 x_n(0)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} x'^\alpha x'^\beta.$$

We thus define

$$\Omega^*_{\alpha\beta}(x^\alpha) = \frac{\partial^2 x_n(x^\alpha)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}, \tag{7.13}$$

and (7.12) can be written in the form

$$\frac{1}{R^*(x, x')} = \frac{\Omega^*_{\alpha\beta}(x^\alpha)\, dx^\alpha dx^\beta}{\bar{g}_{\alpha\beta}(x, x')\, dx^\alpha dx^\beta} \tag{7.14}$$

in analogy to (7.3), which might have been expressed in the same fashion using the law

$$\Omega_{\alpha\beta}(x, x') = \Omega_{ij}(x, x') \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} \tag{7.15}$$

corresponding to (2.9) of Part I since Ω_{ij} is a tensor. Having transformed (7.3) in this manner and observing (7.7) a comparison with (7.14) shows that

$$\Omega^*_{\alpha\beta}(u) \cos\left(n, n^*(x, x')\right) = \Omega_{\alpha\beta}(x, x'). \tag{7.16}$$

Here the Rigorous Quotient Theorem was used; this is permissible since by (7.13) $\Omega^*_{\alpha\beta}$ is independent of x'^α and symmetrical in α, β [10]).

For future reference we note that in vitue of (7.8) and (7.14) equation (7.4) may now be written in the form

$$\frac{Dx'^i}{Ds} = [\Omega^*_{\alpha\beta}(u^\alpha)\, u'^\alpha u'^\beta]\, n^{*i}(x, x') + \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\bar{D} u'^\alpha}{Ds}, \tag{7.17}$$

[where $x^i = x^i(u^\alpha)$ are the parametric equations of F_{n-1}, u'^α being given by (7.5)].

To return to the original problem mentioned at the beginning of this section we consider the function $\Omega^*_{\alpha\beta}(u^\alpha)\, u'^\alpha u'^\beta$ rather than $\Omega_{\alpha\beta}(u, u')\, u'^\alpha u'^\beta$ and we shall call the former the *secondary second fundamental form* of F_{n-1} in view of (7.14). It is of importance to notice that the $\Omega^*_{\alpha\beta}$ are functions of position only, so that when we construct in the Minkowskian tangent space $T_{n-1}(P)$ to F_{n-1} at P the $(n-2)$-dimensional surface represented by the equation

$$\Omega^*_{\alpha\beta}(u^\alpha)\, u'^\alpha u'^\beta = 1, \tag{7.18}$$

we obtain a *quadric surface* (or a pair of conjugate quadrics) which we regard as a generalisation of the classical Dupin Indicatrix. From (7.14) we can immediately deduce the following basic property of such an Indicatrix: *The length of the radius vector of the Dupin Indicatrix in any direction is equal to the root of the secondary radius of curvature of the hypersurface in that direction.*

We now define *principal directions* at the point P to be those directions for which the length of the radius vectors of (7.18) assume extreme values. Thus we have to determine extreme values of $\bar{g}_{\alpha\beta}(u, u')\, u'^\alpha u'^\beta$ subject to the

[10]) Footnote added during proof: Strictly speaking we should use (7.16) for the *definition* of $\Omega_{\alpha\beta}$ in terms of $\Omega^*_{\alpha\beta}$. By means of (7.7) equation (7.3) can thus be derived, and a further argument, using the fact that $\Omega_{\alpha\beta}$ must be a tensor, leads to the expression (7.2).

condition (7.18); i.e. we have to find solutions of the equations (u^α being kept constant)

$$\frac{\partial}{\partial u'^\gamma}\left[\bar{g}_{\alpha\beta}(u, u')\, u'^\alpha u'^\beta + \lambda\left(\Omega^*_{\alpha\beta}(u^\alpha)\, u'^\alpha u'^\beta - 1\right)\right] = 0,$$

the λ's being the undetermined multipliers of Lagrange. Thus possible solutions u'^α must satisfy

$$\frac{\partial \bar{g}_{\alpha\beta}(u, u')}{\partial u'^\gamma} u'^\alpha u'^\beta + 2\bar{g}_{\alpha\gamma}(u, u')\, u'^\alpha + 2\lambda \Omega^*_{\alpha\gamma}(u^\alpha)\, u'^\alpha = 0. \tag{7.19}$$

The first term on the left-hand side vanishes identically in view of the homogeneity properties of the $\bar{g}_{\alpha\beta}$. But since the $\bar{g}_{\alpha\beta}$ are functions of direction nothing can be said about the number of independent possible solutions since our equations are not necessarily linear in the u'^α.

However, let us assume for the moment that at least two independent solutions $u'^\alpha_{(p)}$, $u'^\alpha_{(q)}$ of (7.19) corresponding to two *different* values $\lambda_{(p)}$, $\lambda_{(q)}$ of λ exist. Geometrically such an assumption would seem natural. According to (7.19) these satisfy the equations

$$\bar{g}_{\alpha\gamma}(u, u'_{(p)})\, u'^\alpha_{(p)} + \lambda_{(p)}\, \Omega^*_{\alpha\gamma}(u^\alpha)\, u'^\alpha_{(p)} = 0. \tag{7.20}$$

Multiplying (7.20) by $u'^\gamma_{(p)}$ and summing over γ we find on comparison with (7.14)

$$\lambda_{(p)} = -R^*(u, u'_{(p)}). \tag{7.21}$$

Using this result, let us multiply (7.20) by $u'^\gamma_{(q)}$, again summing over γ, afterwards interchanging the indices p and q. We thus obtain two equations

$$\begin{cases} \bar{g}_{\alpha\gamma}(u', u'_{(p)})\, u'^\alpha_{(p)}\, u'^\gamma_{(q)} = R^*(u, u'_{(p)})\, \Omega^*_{\alpha\gamma}(u)\, u'^\alpha_{(p)}\, u'^\gamma_{(q)} \\ \bar{g}_{\alpha\gamma}(u', u'_{(q)})\, u'^\alpha_{(q)}\, u'^\gamma_{(p)} = R^*(u, u'_{(q)})\, \Omega^*_{\alpha\gamma}(u)\, u'^\alpha_{(q)}\, u'^\gamma_{(p)}. \end{cases} \tag{7.22}$$

Since $\bar{g}_{\alpha\gamma}$ and $\Omega^*_{\alpha\gamma}$ are symmetrical in the lower indices, we find by subtraction

$$\frac{\bar{g}_{\alpha\gamma}(u', u'_{(p)})\, u'^\alpha_{(p)}\, u'^\gamma_{(q)}}{R^*(u, u'_{(p)})} = \frac{\bar{g}_{\alpha\gamma}(u', u'_{(q)})\, u'^\alpha_{(q)}\, u'^\gamma_{(p)}}{R^*(u, u'_{(q)})}$$

or, by definition of the Minkowskian cosine (cf. [3], § 2)

$$\frac{\cos(u'_{(p)}, u'_{(q)})}{R^*(u, u'_{(p)})} = \frac{\cos(u'_{(q)}, u'_{(p)})}{R^*(u, u'_{(q)})}. \tag{7.23}$$

This equation then determines the relative direction of principal directions at P in terms of the secondary normal curvatures. It is easily seen that (7.23) is *a generalisation of the law of orthogonality of principal directions in classical differential geometry*, for by (7.21) our assumption $\lambda_{(p)} \neq \lambda_{(q)}$ implies $R^*(u, u'_{(p)}) \neq R^*(u, u'_{(q)})$. Thus, if the Minkowskian cosine were symmetric in its directional arguments, (7.23) would only be possible if $\cos(u'_{(q)}, u'_{(p)}) = 0$. Hence it is also immediately clear from a geometrical point of view why there need not necessarily exist precisely $(n-1)$ principal directions at each point

P of F_{n-1} since from (7.22) we see that *the principal directions are not in general conjugate directions with respect to the Dupin Indicatrix.*

Note: Alternative treatments to the one outlined above are possible, for instance, by defining an alternative Dupin Indicatrix by means of the $(n-2)$-dimensional intersection of the hypersurface $\Omega_{ij}(x, n)\, x'^i\, x'^j = 1$ with the Minkowskian tangent hyperplane $T_{n-1}(P)$ to F_{n-1} at P. This is again a quadric surface. By defining

$$\frac{1}{R_*(u, u')} = \frac{\Omega_{\alpha\beta}(x, n)\, du^\alpha\, du^\beta}{\bar{g}_{\alpha\beta}(u, u')\, du^\alpha\, du^\beta}$$

in accordance with (7.14), such an R_* would have some of the properties of R^* but cannot be brought into a close connection with our original normal curvature R. Hence we discarded this approach altogether. Other definitions of the Dupin Indicatrix were investigated but were found to be analytically complicated and lacking in geometrical clarity.

§ 8. The covariant derivative of the unit normal.

For later developments it is necessary to have an explicit expression for the covariant derivative of the unit normal vector n^i to our hypersurface F_{n-1} in terms of Ω_{ij}. Here new difficulties peculiar to Finsler spaces arise since Dn^i/Ds is not in general a vector of F_{n-1} when we differentiate covariantly along a curve C of F_{n-1}. From (7.2) we have (x' being the unit tangent vector of C)

$$\text{(8.1)}\quad \left\{ \begin{aligned} \Omega_{ij}(x, x')\, x'^j = &-\frac{1}{2}\left(\frac{Dn_i}{Dx^j}\, x'^j + \frac{Dn_j}{Dx^i}\, x'^j\right) - \\ &-\frac{1}{4}\, g^{mp}(x, x')\, \frac{\partial g_{mi}(x, x')}{\partial x'^k} \left\{ \begin{matrix} k \\ h\, j \end{matrix} \right\}_{(x, x')} x'^j\, x'^h\, n_p, \end{aligned} \right.$$

where

$$\text{(8.2)}\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{Dn_i}{Dx^j}\, x'^j = &\frac{\partial n_i}{\partial x^j}\, x'^j - \\ &-\left\{ \begin{matrix} h \\ i\, j \end{matrix} \right\}_{(x, x')} n_h\, x'^j + \frac{1}{2}\, g^{hm}(x, x')\, \frac{\partial g_{im}(x, x')}{\partial x'^l} \left\{ \begin{matrix} l \\ p\, j \end{matrix} \right\}_{(x, x')} x'^p\, x'^j\, n_h \end{aligned} \right.$$

and

$$\text{(8.3)}\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{Dn_j}{Dx^i}\, x'^j = &\frac{\partial n_j}{\partial x^i}\, x'^j - \\ &-\left\{ \begin{matrix} h \\ j\, i \end{matrix} \right\}_{(x, x')} n_h\, x'^j + \frac{1}{2}\, g^{hm}(x, x')\, \frac{\partial g_{jm}(x, x')}{\partial x'^l} \left\{ \begin{matrix} l \\ p\, i \end{matrix} \right\}_{(x, x')} x'^p\, x'^j\, n_h \end{aligned} \right.$$

by definition of our covariant derivative (cf. [1], p. 123). The last term of (8.3) vanishes in view of the homogeneity properties of the g_{ij}.

Let us now write the equation to F_{n-1} in the form:

$$\text{(8.4)}\qquad f(x^i) = \text{const.}$$

Then

$$\text{(8.5)}\qquad \frac{\partial f}{\partial x^i}\, x'^i = 0$$

for all direction x'^i tangential to F_{n-1} at the point $P(x^i)$ of F_{n-1}. From (4.2) it follows that the covariant vector $\partial f/\partial x^i$ has the same direction as n_i. We thus have

$$n_i = \psi(x^k)\,\frac{\partial f}{\partial x^i}, \tag{8.6}$$

where

$$\psi(x^i) \equiv \left[g^{ij}(x, n)\,\frac{\partial f}{\partial x^i}\,\frac{\partial f}{\partial x^j}\right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{8.7}$$

since n_i is a unit vector.

From (8.5) and (8.6) we deduce

$$\frac{\partial n_i}{\partial x^j}\,x'^j = \frac{d\psi}{ds}\cdot\frac{\partial f}{\partial x^i} + \psi\,\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)$$

or

$$\frac{\partial n_i}{\partial x^j}\,x'^j = \psi\,\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) + \frac{d}{ds}\,(\log\psi)\,n_i. \tag{8.8}$$

Also,

$$\frac{\partial n_j}{\partial x^i}\,x'^j = \frac{\partial \psi}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial f}{\partial x^j}\,x'^j + \psi\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\,\partial x^j}\,x'^j.$$

But by (8.5) the first term on the right-hand side vanishes, so that

$$\frac{\partial n_j}{\partial x^i}\,x'^j = \psi\,\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right). \tag{8.9}$$

Consequently

$$\frac{\partial n_j}{\partial x^i}\,x'^j = \frac{\partial n_i}{\partial x^j}\,x'^j - \frac{d}{ds}\,(\log\psi)\,n_i. \tag{8.10}$$

Adding (8.2) and (8.3) and taking into account (8.10) we find for the expression (8.1):

$$-\Omega_{ij}(x, x')\,x'^j = \frac{\partial n_i}{\partial x^j}\,x'^j - \frac{1}{2}\,\frac{d}{ds}\,(\log\psi)\,n_i -$$

$$-\frac{1}{2}\left[\left\{\begin{matrix} h \\ i\ j \end{matrix}\right\}_{(x,\,x')} + \left\{\begin{matrix} h \\ j\ i \end{matrix}\right\}_{(x,\,x')}\right] n_h\,x'^j + \frac{1}{4}\,g^{hm}(x, x')\,\frac{\partial g_{im}(x, x')}{\partial x'^l}\left\{\begin{matrix} l \\ p\ j \end{matrix}\right\}_{(x,\,x')} x'^p\,x'^j\,n_h +$$

$$+\frac{1}{4}\,g^{mp}(x, x')\,\frac{\partial g_{im}(x, x')}{\partial x'^k}\left\{\begin{matrix} k \\ h\ j \end{matrix}\right\}_{(x,\,x')} x'^j\,x'^h\,n_p.$$

Since the Christoffel symbols of the second kind are symmetrical in their lower indices, we can reduce the last expression to the form

$$\begin{aligned} &-\Omega_{ij}(x, x')\,x'^j \\ &= \left[\frac{\partial n_i}{\partial x^j} - \left\{\begin{matrix} h \\ i\ j \end{matrix}\right\}_{(x,\,x')} n_h + \frac{1}{2}\,g^{hm}(x, x')\,\frac{\partial g_{im}(x, x')}{\partial x'^l}\left\{\begin{matrix} l \\ p\ j \end{matrix}\right\}_{(x,\,x')} x'^p\,n_h\right] x'^j - \\ &\qquad - \frac{1}{2}\,\frac{d}{ds}\,(\log\psi)\,n_i. \end{aligned} \tag{8.11}$$

For the sake of brevity let us put

$$T_i^h(x, x') = \frac{1}{4}\,g^{hm}(x, x')\,\frac{\partial g_{im}(x, x')}{\partial x'^l}\left\{\begin{matrix} l \\ p\ j \end{matrix}\right\}_{(x,\,x')} x'^p\,x'^j. \tag{8.12}$$

Also, by definition of the covariant derivative the quantities in the square brackets of (8.11) become

$$\frac{Dn_i}{Ds},$$

so that we finally have from (8.11)

$$\frac{Dn_i}{Ds} = -\Omega_{ij}(x, x')\, x'^j + \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(\log\psi)\, n_i. \tag{8.13}$$

This is the required formula.

As a first application let us consider a principal direction x'^i (or u'^α) of F_{n-1} at P. The condition for this may be expressed in virtue of (7.20) and (7.21) in the form

$$y_i \equiv g_{ij}(x, x')\, x'^j = R^*(x, x')\, \Omega^*_{ij}(x)\, x'^j$$

when written with respect to the coordinates of the enveloping space F_n. (Cf. Part I, § 2.) But from (7.16) and (7.7) we see that

$$R^*(x, x')\, \Omega^*_{ij}(x) = \Omega_{ij}(x, x')\, R(x, x'),$$

so that our condition becomes

$$\Omega_{ij}(x, x')\, x'^j = y_i [R(x, x')]^{-1}. \tag{8.14}$$

Substituting in (8.13) we find for principal directions

$$\frac{Dn_i}{Ds} = -\frac{y_i}{R(x, x')} + \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(\log\psi)\, n_i. \tag{8.15}$$

This formula represents the generalisation of the well-known formula of Rodrigues, since the y_i are simply the covariant components of the tangent vector to the principal direction. In Riemannian space the last term on the right-hand side of (8.15) cannot appear since in any case Dn_i/Ds would have no component normal to the tangent plane; this is easily deduced from the fact that n_i is a unit vector.

In the case of a Minkowskian space (i.e. when the g_{ij} depend only on the direction) the covariant derivative is simply the ordinary derivative. Also, here it is easily verified that in view of the homogeneity properties of the g_{ij} the vector dn_i/ds also lies in the tangent plane to F_{n-1}, so that in both Riemannian or Minkowskian space (8.15) reduces to the usual form (cf. [3], § 5)

$$\frac{Dn_i}{Ds} = -y_i [R(x, x')]^{-1}.$$

As a further application of the formulae of this section let us consider once more the covariant derivative DX^i/Ds of a vector-field X^i (or U^α) of F_{n-1}, the process of covariant differentiation taking place along a curve C of F_{n-1}. For the case that X^i coincides with the tangent vector x'^i of C we were already able to evaluate the unknown coefficient $\lambda(x, x', X)$ in equation (4.7) which gave us an explicit expression (7.17) for DX^i/Ds in terms of $\delta X^i/\delta s$ [as defined by (4.5)]. We are now in a position to obtain a similar

but more general expression, X_i being an arbitrary differentiable vector-field of F_{n-1}. Multiplying (4.7) by $n_i(x)$, we have

$$n_i \frac{DX^i}{Ds} = \lambda(x, x', X)\, n^{*i}(x, x')\, n_i + \frac{\delta X^i}{\delta s} n_i,$$

but since by (4.5) $\delta X^i/\delta s$ (being a vector of F_{n-1}) is orthogonal with respect to n_i the last term on the right-hand side vanishes. Also, since n_i, n^{*i} are unit vectors, $n^{*i}(x, x')\, n_i = \cos(n, n^*)$, so that we find

$$n_i \frac{DX^i}{Ds} = \lambda(x, x', X) \cos(n, n^*). \tag{8.16}$$

But we also have $n_i X^i = 0$; thus

$$n_i \frac{DX^i}{Ds} = -X^i \frac{Dn_i}{Ds} = -\frac{1}{2}\left(X^i \frac{Dn_i}{Dx^j} x'^j + X^i \frac{Dn_i}{Ds}\right). \tag{8.17}$$

Substituting from (5.5) in (6.10) we have

$$\left\{\begin{aligned} X^i \frac{Dn_i}{Ds} &= \left[\frac{dn_i}{ds} - \left\{\begin{matrix} h \\ i\,k \end{matrix}\right\}_{(x,x')} n_h\, x'^k\right] X^i + \\ &\quad + \frac{1}{2} g^{hm}(x, x') \frac{\partial g_{im}(x, x')}{\partial x'^l} \left\{\begin{matrix} l \\ j\,k \end{matrix}\right\}_{(x,x')} x'^j\, x'^k\, n_h\, X^i. \end{aligned}\right. \tag{8.18}$$

Also, from (8.3) it follows that

$$X^i \frac{Dn_j}{Dx^i} x'^j = \left[\frac{\partial n_j}{\partial x^i} x'^i \quad \left\{\begin{matrix} h \\ j\,i \end{matrix}\right\}_{(x,x')} n_h\, x'^j\right] X^i$$

and using (8.10) we find

$$X^i \frac{Dn_j}{Dx^i} x'^j = \left[\frac{\partial n_i}{\partial x^j} x'^j - \left\{\begin{matrix} h \\ i\,k \end{matrix}\right\}_{(x,x')} n_h^* x'^k\right] X^i - \frac{d}{ds}(\log \psi)\, n_i X^i.$$

Again the last term on the right-hand side vanishes since X^i is a vector of F_{n-1}. Comparing the latter equation with (8.18) we thus have

$$X^i \frac{Dn_i}{Ds} = X^i \frac{Dn_j}{Dx^i} x'^j + 2T_i^h(x, x')\, n_h X^i, \tag{8.19}$$

where we have made use of the notation defined in (8.12). We can now substitute (8.19) in (8.17) and we find

$$n_i \frac{DX^i}{Ds} = -\frac{1}{2} X^i \left(\frac{Dn_i}{Dx^j} + \frac{Dn_j}{Dx^i}\right) x'^j - T_i^h(x, x')\, n_h X^i. \tag{8.20}$$

We now introduce our second fundamental form $\Omega_{ij}(x, x')$ by means of equation (7.2) and compare the latter result with (8.16), obtaining

$$\lambda(x, x', X) \cos(n, n^*) = \Omega_{ij}(x, x')\, X^i x'^j. \tag{8.21}$$

But by (7.15) and (2.6) of Part I we have

$$\Omega_{ij}(x, x')\, X^i x'^j = \Omega_{ij}(x, x') \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} U^\alpha \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} u'^\beta = \Omega_{\alpha\beta}(u, u')\, U^\alpha u'^\beta.$$

Hence with the aid of (7.16) we may now write (8.21) in the form

$$\lambda(x, x', X) = \Omega^*_{\alpha\beta}(u)\, U^\alpha u'^\beta. \tag{8.22}$$

Thus we have determined λ completely. Equation (4.7) can now be written in its final form:

$$\frac{DX^i}{Ds} = \{\Omega^*_{\alpha\beta}(u)\, U^\alpha u'^\beta\}\, n^{*i}(x, x') + \frac{\delta X^i}{\delta s}. \tag{8.23}$$

This then is the required explicit comparison of DX^i/Ds with $\delta X^i/\delta s$. If we return to the particular case $X^i \equiv x'^i$ (or $U^\alpha = u'^\alpha$) (i.e. X^i tangential to C) it is easily seen that (8.23) reduces to (7.17). The geometrical relation between DX^i/Ds and $\delta X^i/\delta s$ is now evident: the quantity in curly brackets is the projection of DX^i/Ds onto the normal vector $n^*(x, x')$, *while* $\delta X^i/\delta s$ *[which, by* (4.5) *is the covariant derivative of* U^α *with respect to the metric of* F_{n-1}*] is the projection of* DX^i/Ds *onto the Minkowskian tangent plane* T_{n-1} *of* F_{n-1}*, the normal cone being used for the process of projection.*

§ 9. Asymptotic Directions. Mean Curvature of a hypersurface.

Two directions $u'_{(p)}$, $u'_{(q)}$ of F_{n-1} at a point P of F_{n-1} are said to be conjugate (as in classical differential geometry) if they satisfy the condition

$$\Omega^*_{\alpha\beta}(u)\, u'^\alpha_{(p)}\, u'^\beta_{(q)} = 0. \tag{9.1}$$

It follows from (7.22) that two *principal directions are conjugate directions if and only if the cosine corresponding to these two directions is symmetrical* (in which case the directions are also mutually orthogonal). This is equivalent to the condition that there exists an $(n-2)$-dimensional quadric surface in T_{n-1} touching the "metric" indicatrix in two points corresponding to the directions $x'_{(p)}$, $x'_{(q)}$.

Furthermore, asymptotic directions are defined to be self-conjugate, i.e. they have to satisfy

$$\Omega^*_{\alpha\beta}(u)\, u'^\alpha u'^\beta = 0. \tag{9.2}$$

From (7.14) and (7.7) is then follows that for *asymptotic directions both the normal and secondary normal curvature of* F_{n-1} *vanish.*

Also, we deduce from (7.17) that *when we differentiate covariantly along an asymptotic direction of* F_{n-1} *the covariant derivative with respect to the metric of* F_n *is identical to the covariant derivative with respect to the metric of* F_{n-1}.

In particular, *if the tangents to a geodesic* Γ *of* F_{n-1} *are asymptotic directions,* Γ *is also a geodesic of* F_n. Conversely, *geodesics of* F_n *which are also curves of* F_{n-1} *are geodesics of* F_{n-1} *and are tangential to asymptotic directions of* F_{n-1}. This fact represents an extension of the result proved in § 4.

Reverting to the notation of § 7, we see from (7.10) that if x'^i is an asymptotic direction at F_{n-1} at P:

$$z_i N^{*i}(x, x') = 0(\delta s^3)$$

or

$$|H\, H'| = 0(\delta s^3).$$

Thus we have the result: *If a geodesic of F_{n-1} is tangential to an asymptotic direction at P it has contact of at least the second order with the geodesic of F_n touching it at P.*

As is customary we call a point P of F_{n-1} a *umbilical point* if the principal directions at P are indeterminate. This implies that the Dupin Indicatrix is homothetic to the "metric" Indicatrix, i.e. if $\overline{g}_{\alpha\beta}(u, u') = \Omega^*_{\alpha\beta}(u)$. [Compare equation (7.20).] This is possible only if the metric Indicatrix is a quadric [i.e. $\overline{g}_{\alpha\beta}(u, u')$ independent of direction], so that F_{n-1} at P is locally euclidean. Thus, *umbilical points can exist only at such points of F_{n-1} for which the local metric is euclidean.*

If *all* the geodesics of F_{n-1} are also geodesics of the enveloping F_n, the hypersurface (if such a hypersurface exists) is called a *totally geodesic hypersurface*. According to (7.17) this is possible only if (9.2) is satisfied for all possible directions of F_{n-1} (since both Dx'^i/Ds and Du'^α/Ds vanish). This requires $\Omega^*_{\alpha\beta} - \Omega_{\alpha\beta} = 0$ at all points of F_{n-1}. Using (7.15) we apply this result to (8.13). It is seen that Dn_i/Ds does not necessarily vanish. Hence in contrast to the corresponding result of Riemannian Geometry we see that *the normals of a totally geodesic hypersurface are not necessarily parallel in the enveloping space.*

In order to arrive at the notion of *mean curvature* of F_{n-1} we carry out the following geometrical construction. Consider the $(n-2)$-dimensional surface in $T_{n-1}(P)$ obtained by the intersection of the quadric $g_{ij}(x^h, n^k)\, x'^i x'^j = 1$ with the tangent hyperplane to F_{n-1} at P. This quadric surface can be represented by the equation

$$\gamma_{\alpha\beta}(u)\, u'^\alpha u'^\beta = 1. \tag{9.3}$$

Denote by $\gamma^{\alpha\beta}(u)$ the algebraic complements of the $\gamma_{\alpha\beta}$ in the determinant $|\gamma_{\alpha\beta}|$. It follows from the theory of quadratic forms that there exist sets of $(n-1)$ independent vectors $u'^\alpha_{(\nu)}$ such that

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} u'^\alpha_{(\nu)}\, u'^\beta_{(\nu)} = \gamma^{\alpha\beta}(u). \tag{9.4}$$

To each direction $u'_{(\nu)}$ corresponds a value $R^{*-1}_{(\nu)}$ of the secondary normal curvature of F_{n-1} at P given by (7.14):

$$\frac{1}{R^*_{(\nu)}} = \frac{\Omega^*_{\alpha\beta}(u)\, u'^\alpha_{(\nu)}\, u'^\beta_{(\nu)}}{g_{\alpha\beta}(u, u'_{(\nu)})\, u'^\alpha_{(\nu)}\, u'^\beta_{(\nu)}} = \frac{\Omega^*_{\alpha\beta}(u)\, u'^\alpha_{(\nu)}\, u'^\beta_{(\nu)}}{|u'_{(\nu)}|^2}.$$

Multiplying each of these $(n-1)$ equations by $|u'_{(\nu)}|^2$ and summing over ν it follows from (9.4) that

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{|u'_{(\nu)}|^2}{R^*_{(\nu)}} = \Omega^*_{\alpha\beta}(u) \left(\sum_{\nu=1}^{n-1} u'^\alpha_{(\nu)}\, u'^\beta_{(\nu)} \right) = \Omega^*_{\alpha\beta}(u)\, \gamma^{\alpha\beta}(u). \tag{9.5}$$

We deduce therefore that this sum is an invariant for *any* set of $(n-1)$ directions of F_{n-1} satisfying (9.4). Also, we note that the right-hand side of (9.5)

is independent of direction so that we may write

$$M^*(u) = \Omega^*_{\alpha\beta}(u)\,\gamma^{\alpha\beta}(u). \tag{9.6}$$

We shall call $M^*(u)$ the *secondary mean curvature* of F_{n-1} at the point P of F_{n-1}. Multiplying (9.6) by $\cos(n, n^*(x, x'))$, x' (or u') being an arbitrary direction of F_{n-1} at P, we find in virtue of (7.16)

$$M^*(u)\cos(n, n^*) = \Omega_{\alpha\beta}(u, u')\,\gamma^{\alpha\beta}(u) = M(u, u') \tag{9.7}$$

say, which we call the *mean curvature* of F_{n-1} with respect to the direction u' at the point P of F_{n-1}.

Now it follows from the definition of $\gamma^{\alpha\beta}(u)$ that we may write

$$\gamma^{\alpha\beta}(u)\,\Omega_{\alpha\beta}(u, u') = \gamma^{\alpha\beta}(u)\,\Omega_{ij}(x, x')\,\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} = g^{ij}(x, n)\,\Omega_{ij}(x, x')$$

when we consider also equation (2.24) of Part I. Thus from (9.7) we have

$$M(x, x') = g^{ij}(x, n)\,\Omega_{ij}(x, x'). \tag{9.8}$$

Up to this point our discussion was restricted to the case of hypersurfaces. In part III of this paper we shall indicate the generalisation of our results to m-dimensional subspaces.

Bibliography.

[1] RUND, H.: Über die Parallelverschiebung in Finslerschen Räumen. Math. Z. **54**, 115—128 (1951). — [2] LIPKA, J.: On the relative curvature of two curves in V_n. Bull. Amer. Math. Soc. **29**, 345—348 (1923). — [3] RUND, H.: Zur Begründung der Differentialgeometrie in Minkowskischen Räumen. Arch. Math. **3**, 60—69 (1952). — [4] BUSEMANN, H.: Geodesic curvature in two-dimensional Finsler Spaces. Ann. Mat. pura appl., Bologna, III. Ser. **31**, 281—295 (1950). — [5] BUSEMANN, H.: The foundations of Minkowskian geometry. Comm. Math. Helv. **24**, 156—187 (1950). — [6] BERWALD, L.: Über die Hauptkrümmungen einer Fläche im dreidimensionalen Finslerschen Raum. Mh. Math. u. Phys. **43**, 1—14 (1936).

Bonn, Mathematisches Seminar, Meckenheimer Allee 172.

(Eingegangen am 22. April 1952.)

Stoll, W.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 211—237 (1953)

Ganze Funktionen endlicher Ordnung mit gegebenen Nullstellenflächen.

Von
Wilhelm Stoll.

§ 1. Einleitung.

Der Logarithmus einer meromorphen Funktion endlicher Ordnung $f(\mathfrak{z}) = f(z_1, \ldots, z_n)$ läßt sich in einer Nullpunktsumgebung nach H. Kneser [3][1]) als ein Integral über die Fläche $\mathfrak{N}$ der Pol- und Nullstellen von f [s. unten (1.10)] darstellen. Diese Darstellung geht im Falle $n = 1$ in die Weierstrasssche Produktdarstellung

$$\log f(y) = g(y) + \sum_z \left\{ \log\left(1 - \frac{y}{z}\right) + \sum_{\nu=1}^{q} \frac{1}{\nu} \left(\frac{y}{z}\right)^{\nu} \right\}$$

über, wobei z die Pol- und Nullstellen von $f(y)$ mit ihrer Vielfachheit durchläuft. Sind umgekehrt die Nullstellen vorgegeben, so wird unter der notwendigen Konvergenzvoraussetzung durch die Summe eine solche Funktion $f(y)$ geliefert. Bei mehreren Veränderlichen ist dies mit dem Integral (1.10) statt der Summe auch richtig. Der Beweis ist aber bei mehreren Veränderlichen keineswegs mehr trivial und stellt die Aufgabe dieser Arbeit dar. Um diesen Beweis führen zu können, wurden in der Arbeit „Mehrfache Integrale auf komplexen Mannigfaltigkeiten" [Math. Z. **57**, S. 116—154 (1952)], die weiterhin mit I zitiert werde, notwendige Vorbereitungen getroffen. Die in I eingeführten Bezeichnungen werden wieder benützt.

Bevor nun die Fragestellung näher erläutert werden kann, ist es erforderlich, an einige Definitionen und Sätze der Arbeit von H. Kneser [3] zu erinnern.

Die überall meromorphe Funktion $f(\mathfrak{z}) \equiv a$ habe die a-Stellenfläche $\mathfrak{N}(a)$ und die Vielfachheit der a-Stelle $\nu(\mathfrak{z}, a)$. Wegen I Satz 10 kann man die *Anzahlfunktion* $n(r, a)$ durch[2])

$$\left\{ \begin{aligned} n(r, a) &= \frac{1}{V_{2n-2}(r)} \int_{r_0 \mathfrak{N}(a)}^{r} \nu(\mathfrak{z}, a)\, \dot{\partial} v_{2n-2} \qquad (r_0 > 0) \\ &= \frac{1}{W_{2n-2}} \int_{r_0 \mathfrak{N}(a)}^{r} \nu(\mathfrak{z}, a)\, \partial\omega_{2n-2} + \nu(0, a) \end{aligned} \right. \tag{1.1}$$

[1]) Die Nummer [3] bezieht sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

[2]) Zur Bezeichnungsweise vergleiche I, insbesondere § 3. $\mathfrak{R}^{2n}$, $\dot{\partial} v_{2n-2}$, $\partial\omega_{2n-2}$ werden in (I.3.6) bis (I.3.13), V_{2n-2}, W_{2n-2}, und V_{2n-1} in (I.3.22) erklärt. ∂v_{2n-1} ist das euklidische Oberflächenelement der Hyperkugel. $\int_{r_0 \mathfrak{N}(a)}^{r}$ bezeichnet die Integration über den in der Kugelschale $r_0 \leq |\mathfrak{z}| \leq r$ liegenden Teil von $\mathfrak{N}(a)$. In (I.3.5) ist $(\mathfrak{y}|\mathfrak{z})$ erklärt.

definieren. *Die Valenz* $N(r, a)$ (*große Anzahlfunktion*) sei

$$N(r,a) = \int_{r_0}^{r} \frac{n(t,a)}{t}\, dt. \tag{1.2}$$

Setzt man $a = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, so sei die *Schmiegungsfunktion*[2])

$$m(r,a) = \frac{1}{\omega_{2n-1}(r)} \int_{|\mathfrak{z}|=r} \log \frac{\sqrt{1+|f|^2}\sqrt{|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2}}{\alpha_1 f - \alpha_2}\, \partial v_{2n-1}(\mathfrak{z}). \tag{1.3}$$

Mit $K = [|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 = 1]$ definiert man

$$\nu = \frac{1}{2\pi^2} \int_K \nu\left(0, -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \partial v_3. \tag{1.4}$$

Dann gilt

$$A(r) = \frac{1}{\pi V_{2n-2}(r)} \int_{|\mathfrak{z}|\leqq r} \frac{\partial f\, \partial \bar{f}}{(1+|f|^2)^2}\, \partial v_{2n-2}(\mathfrak{z})$$

$$= \frac{1}{\pi W_{2n-2}} \int_{|\mathfrak{z}|\leqq r} \frac{\partial f\, \partial f}{(1+|f|^2)^2}\, \partial \omega_{2n-2}(\mathfrak{z}) + \nu.$$

Die *Charakteristik* wird durch

$$T(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{A(t)}{t}\, dt$$

erklärt. Nach H. KNESER [3] § 4 gilt nun der 1. Hauptsatz:

$$T(r) = N(r,a) + m(r,a) - m(r_0,a)\ ^3). \tag{1.7}$$

Es werde $\nu(\mathfrak{z}) = \nu(\mathfrak{z}, 0) - \nu(\mathfrak{z}, \infty)$ und $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(0) - \mathfrak{N}(\infty)$ gesetzt. In der Kugel $[|\mathfrak{z}| \leqq r_0]$ sei $\log f(\mathfrak{z})$ regulär, d.h. $\mathfrak{N}_{0 r_0}$ sei leer. Mit $E(x,q) = (1-x)\exp\left(\sum_{\nu=1}^{q} \frac{x^\nu}{\nu}\right)$ werde der WEIERSTRASSsche Primfaktor abgekürzt. Ferner sei

$$e(x,q) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \{x^{n-1} \log E(x,q)\}. \tag{1.8}$$

Für eine ganze Zahl $q \geqq 0$ strebe

$$T(r)\, r^{-q-1} \to 0 \quad \text{für} \quad r \to \infty. \tag{1.9}$$

Dann gilt nach H. KNESER [3] § 6 *in der Vollkugel* $[|\mathfrak{v}| \leqq r_0]$ *die Gleichung*[2]):

$$\log f(\mathfrak{v}) = g(\mathfrak{v}) + \lim_{r\to\infty} \frac{1}{W_{2n-2}} \int_{0\,\mathfrak{N}}^{r} \nu(\mathfrak{z})\, e\left\{\frac{(\mathfrak{v}\,\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}\,\mathfrak{z})}, q\right\} \partial \omega_{2n-2}, \tag{1.10}$$

[3]) Die Größen $N(r,a)$, $n(r,a)$, $m(r,a)$, $m(r_0,a)$ und $T(r)$ sind analog zu WEYL [8] Kap. II, § 2 gebildet. Für $r_0 \to 0$ gehen sie in die von H. KNESER [3], § 4 über, die denen von R. NEVANLINNA [5], Kap. VIII, § 3 im Falle einer Veränderlichen entsprechen. Vgl. auch die letzte Gleichung von [5], Kap. VI, § 1, S. 156.

wobei $g(\mathfrak{v})$ ein Polynom höchstens q-ten Grades ist. Existiert sogar das Integral $\int_0^r T(r)\, r^{-q-2}\, dr$, so ist auch $\int_{\mathfrak{R}} v\, e\, \dot{\omega}_{2n-2}$ vorhanden, und man darf gemäß I Definition 4 jetzt $\int_{\mathfrak{R}}$ statt $\lim_{r\to\infty} \int_{0\mathfrak{R}}^{r}$ schreiben. Das Integral in (1.10) und auch der Grenzübergang in (1.10) existieren, wenn $(\mathfrak{v}\,\mathfrak{z}) \neq (\mathfrak{z}|\mathfrak{z})$ für jeden Punkt $\mathfrak{z} \in \mathfrak{R}$ gilt. Die Gl. (1.10) gilt also in dem größten Teilgebiet $\mathfrak{K}$ der Menge[2]) $\mathfrak{K}^* = \mathfrak{R}^{2n} - [(\mathfrak{v}-\mathfrak{z}|\mathfrak{z}) = 0 \text{ mit } \mathfrak{z} \in \mathfrak{R}]_{\mathfrak{v}}$, das den Nullpunkt enthält. Das Gebiet $\mathfrak{K}$ umfaßt die Vollkugel $|\mathfrak{v}| \leq r_0$. Wenn $\mathfrak{R}$ nicht leer ist, so ist $\mathfrak{K}$ ein echtes Teilgebiet von $\mathfrak{R}^{2n}$. Es kann beschränkt und unbeschränkt sein[4]). Im Falle $n=1$ geht (1.10) in den WEIERSTRASSschen Produktsatz in logarithmischer Gestalt über.

Wie bei einer Veränderlichen stellen sich nun zwei Fragen[5]):

I. Wird bei vorgegebener Nullstellenfläche $\mathfrak{R}$ mit der Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$ durch

$$h(\mathfrak{v}) = \exp\left\{\frac{1}{W_{2n-2}} \int_{\mathfrak{R}} \nu(\mathfrak{z})\, e\left(\frac{(\mathfrak{v}|\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}|\mathfrak{z})}, q\right) \dot{\omega}_{2n-2}\right\} \tag{1.11}$$

eine überall meromorphe Funktion $h(\mathfrak{v})$ definiert, die auf $\mathfrak{R}$ und nur auf $\mathfrak{R}$ verschwindet, bzw. unendlich wird, und zwar mit der Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$?

II. Wenn ja, was läßt sich über die Ordnung von $h(\mathfrak{v})$ aussagen?

Unter einer geeigneten Konvergenzvoraussetzung (vgl. Satz 3) existiert das Integral (1.11) im Gebiet $\mathfrak{K}$. Durch (1.11) wird eine in $\mathfrak{K}$ analytische Funktion $h(\mathfrak{v})$ erklärt. Das Integral konvergiert aber nur auf dem Teil $\mathfrak{K}^*$

[4]) Das Gebiet $\mathfrak{K}$ heiße Existenzgebiet zur Nullstellenfläche $\mathfrak{R}$. Als Beispiel werde die Ebene $\mathfrak{R} = [z_n = 1]_{\mathfrak{z}}$ betrachtet. Es werde

$$r^2 = \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu \bar{y}_\nu,\quad t^2 = \sum_{\nu=1}^{n-1} y_\nu \bar{y}_\nu,\quad p^2 = \sum_{\nu=1}^{n-2} y_\nu \bar{y}_\nu,\quad y_{n-1} = u + iv,\quad y_n = x + iy$$

gesetzt. Eine leichte, etwas längere Rechnung zeigt, daß das Existenzgebiet $\mathfrak{K}$ zur Ebene $\mathfrak{R}$ das Gebiet

$$\text{(a)} \qquad \mathfrak{K} = \mathfrak{K}^* = [t^2 < 2(1-x) + 2\sqrt{(1-x)^2 + y^2}]_{\mathfrak{v}}$$

ist. Es ist offensichtlich *unbeschränkt*. Als zweites Beispiel liefert die Ebene $\mathfrak{R}_1 = [z_{n-1} = 1]_{\mathfrak{z}}$ das Existenzgebiet

$$\text{(b)} \qquad \mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}_1^* = [p^2 + x^2 + y^2 < 2(1-u) + 2\sqrt{(1-u)^2 + v^2}]_{\mathfrak{v}}.$$

Als drittes Beispiel werde das Existenzgebiet $\mathfrak{K}_2$ der Vereinigung $\mathfrak{R} \cup \mathfrak{R}_1$ betrachtet. Es liegt im Durchschnitt $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{K}_1$. Die Ungleichungen (a) und (b) liefern die Abschätzung

$$r^2 = t^2 + x^2 + y^2 < 2(1-x) + 2\sqrt{(1-x)^2 + y^2} + 2(1-u) + 2\sqrt{(1-u)^2 + v^2}$$
$$r^2 < 4 + 2|1-x| + 2|y| + 4 + 2|1-u| + 2|v|$$
$$r^2 < 4 + 4 + 2|x| + 2|y| + 4 + 4|u| + 2|v|$$
$$r^2 < 8 + 12r$$
$$r < 13$$

Das Existenzgebiet $\mathfrak{K}_2$ liegt in der Kugel mit dem Radius 13 um den Nullpunkt, ist also *beschränkt*.

[5]) Für zwei Veränderliche wurden diese Fragen schon von H. KNESER [2] beantwortet. Die dortige Beweismethode versagt anscheinend bei mehr als zwei Veränderlichen.

von $\mathfrak{R}^{2n}$. Daher ist es allein sinnvoll, die Gültigkeit von (1.11) auf $\mathfrak{K}$ zu verlangen. Hier tritt ein großer Unterschied gegenüber der Theorie einer Veränderlichen auf: 1. Die Darstellung (1.11) liefert nicht automatisch $h(\mathfrak{v})$ für alle $\mathfrak{v}$. Die Fortsetzbarkeit von $h(\mathfrak{v})$ scheint sehr fraglich zu sein. 2. Aus (1.11) läßt sich nicht unmittelbar ablesen, daß $h(\mathfrak{v})$ auf $\mathfrak{N}$ und nur auf $\mathfrak{N}$ verschwindet, bzw. unendlich wird, und noch weniger, mit welcher Vielfachheit das etwa geschieht. 3. Die Darstellung (1.11) ist ungeeignet, um $M(r) = \operatorname{Max}_{|\mathfrak{v}| \leq r} |h(\mathfrak{v})|$ nach oben abzuschätzen, da für große r die Kugeln $[|\mathfrak{v}| \leq r]$ nicht in $\mathfrak{K}$ liegen. Ja selbst in $\mathfrak{K}$ läßt sich wegen (1.8) schlecht abschätzen.

Die gestellten Fragen sind also keineswegs trivial. Zu ihrer Beantwortung werden in § 2 die einfachsten Tatsachen über Ordnung, Klasse, Typ meromorpher Funktionen zusammengestellt. In § 3 werden die benötigten Hilfssätze bereitgestellt, wovon die Hilfssätze 6 und 7 die grundlegenden sind. In § 4 und § 5 werden die gestellten Fragen I. und II. beantwortet.

§ 2. Ordnung, Klasse, Typ und Grenzexponent[6]).

Die *Ordnung* einer nicht abnehmenden Funktion $s(r)$ definiert man bekanntlich durch

$$\lambda = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log s(r)}{\log r}.$$

Wenn die Ordnung $\lambda < \infty$ ist, so sei die Funktion $s(r)$ vom

Maximaltyp, wenn $\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{s(r)}{r^\lambda} = \infty$ *ist,*

Mitteltyp, wenn $0 < \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{s(r)}{r^\lambda} < \infty$ *ist,*

Minimaltyp, wenn $\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{s(r)}{r^\lambda} = 0$ *ist.*

Ist $r_0 > 0$ beliebig gewählt, so sei die Funktion $s(r)$ in der

$$\left.\begin{array}{l}\textit{Divergenzklasse, wenn}\\ \textit{Konvergenzklasse, wenn}\end{array}\right\} \int_{r_0}^{\infty} \frac{s(t)}{t^{\lambda+1}}\, dt \left\{\begin{array}{l} = \infty \textit{ ist,}\\ < \infty \textit{ ist.}\end{array}\right.$$

Dazu werden die Ordnungsbeziehungen:

Maximaltyp > Mitteltyp > Minimaltyp

Divergenzklasse > Konvergenzklasse

eingeführt.

Eine meromorphe Funktion f habe dieselbe Ordnung, Klasse und Typ wie ihre Charakteristik. Diese Festsetzung hängt nicht von der Wahl des Nullpunktes ab. Besitzt nämlich die Funktion $f(\mathfrak{v} + \mathfrak{c})$ mit festem Vektor $\mathfrak{c}$ die Charakteristik $\tilde{T}(r)$, so gilt nach H. KNESER [3] § 4

$$A(t) \leq \left(1 + \frac{|\mathfrak{c}|}{t}\right)^{2n-2} \tilde{A}(t + |\mathfrak{c}|),$$

[6]) Vergleiche [5] Kap. VIII, § 1, S. 208—211.

also

$$T(r) \leq \left(1 + \frac{|c|}{r_0}\right)^{2n-1} \widetilde{T}(r + |c|).$$

Entsprechend folgt die umgekehrte Abschätzung

$$\widetilde{T}(r) \leq \left(1 + \frac{|c|}{r_0}\right)^{2n-1} T(r + |c|).$$

Daher stimmen $T(r)$ und $\widetilde{T}(r)$ in Ordnung, Klasse und Typ überein.

Wie bei einer Veränderlichen definiert man den Grenzexponenten:

Definition 1 (Grenzexponent). *Die* Cousinsche Verteilung[2]) $F_{\mathfrak{R}^{2n}}$ *habe die Nullstellenfläche* $\mathfrak{N}$ *mit der Vielfachheit* $\nu(\mathfrak{z})$. *Wenn* $r_0 > 0$ *beliebig gewählt ist, so heiße die reelle Zahl* μ

$$\left.\begin{array}{l} \text{Konvergenzexponent, wenn} \\ \text{Divergenzexponent, wenn} \end{array}\right\} \frac{1}{W_{2n-2}} \int\limits_{r_0 \mathfrak{R}}^{\sim} \nu(\mathfrak{z})\, |\mathfrak{z}|^{-\mu}\, \partial\omega_{2n-2} \left\{\begin{array}{l} < \infty \text{ ist,} \\ = \infty \text{ ist.} \end{array}\right.$$

Die untere Grenze aller Konvergenzexponenten heiße Grenzexponent.

Diese Einteilung ist von der Wahl von r_0 unabhängig. Der Grenzexponent ist zugleich die obere Grenze aller Divergenzexponenten. Wie im Falle einer Veränderlichen gilt:

Satz 1[6]).

Voraussetzung. *Die* Cousinsche *Verteilung* F *auf* $\mathfrak{R}^{2n}$ *habe die Nullstellenfläche* $\mathfrak{N}$; *die Vielfachheit der Nullstelle von* F *sei* $\nu(\mathfrak{z})$. *Der Vektor* c *und der Radius* $r_0 > 0$ *seien fest gewählt. Dann werde gesetzt:*

$$\widetilde{\mathfrak{N}} = [\tilde{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z} - c \text{ mit } \mathfrak{z} \in \mathfrak{N}]_{\tilde{\mathfrak{z}}}, \qquad \tilde{\nu}(\tilde{\mathfrak{z}}) = \nu(\tilde{\mathfrak{z}} + c),$$

$$n(r) = \frac{1}{W_{2n-2}} \int\limits_{0\mathfrak{N}}^{r} \nu(\mathfrak{z})\, \partial\omega_{2n-2} + \nu(0), \qquad \tilde{n}(r) = \frac{1}{W_{2n-2}} \int\limits_{0\widetilde{\mathfrak{N}}}^{r} \tilde{\nu}(\tilde{\mathfrak{z}})\, \partial\omega_{2n-2} + \tilde{\nu}(0),$$

$$N(r) = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{n(t)}{t}\, dt, \qquad \widetilde{N}(r) = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\tilde{n}(t)}{t}\, dt.$$

Behauptung.

1. *Für jede positive Zahl* μ *konvergieren bzw. divergieren die Integrale*

$$\int\limits_{r_0}^{\infty} N(r)\, r^{-\mu-1}\, dr, \qquad \int\limits_{r_0}^{\infty} n(r)\, r^{-\mu-1}\, dr, \qquad \frac{1}{W_{2n-2}} \int\limits_{r_0 \mathfrak{R}}^{\sim} \nu(\mathfrak{z})\, |\mathfrak{z}|^{-\mu}\, \partial\omega_{2n-2}$$

zugleich.

2. a) Ord $N(r) =$ Ord $n(r) = \varrho =$ *Grenzexponent von* $\mathfrak{N}$,

b) Typ $N(r)$ = Typ $n(r)$, *falls* $\varrho > 0$ *ist,*

c) Klasse $N(r)$ = Klasse $n(r)$, *falls* $\varrho > 0$ *ist.*

Und zwar ist die gemeinsame Klasse die Konvergenzklasse, wenn der Grenzexponent ϱ *ein Konvergenzexponent ist, bzw. die Divergenzklasse, wenn der Grenzexponent* ϱ *ein Divergenzexponent ist.*

3. *Die Funktionen $N(r)$ und $\widetilde{N}(r)$ (bzw. $n(r)$ und $\tilde{n}(r)$) stimmen in Ordnung, Klasse und Typ überein. Die Nullstellenflächen $\mathfrak{N}$ und $\widetilde{\mathfrak{N}}$ haben denselben Grenzexponenten.*

Beweis. Die Zahl μ sei positiv. Wie bei einer Veränderlichen folgt:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{W_{2n-2}} \int_{r_0 \mathfrak{N}}^{r} \nu(\mathfrak{z}) |\mathfrak{z}|^{-\mu} \partial\omega_{2n-2} \\
&\quad = \frac{\mu}{W_{2n-2}} \int_{r_0 \mathfrak{N}}^{r} \nu(\mathfrak{z}) \int_{|\mathfrak{z}|}^{r} \frac{dt}{t^{\mu+1}} \partial\omega_{2n-2} + \frac{1}{W_{2n-2}} \int_{r_0 \mathfrak{N}}^{r} \nu(\mathfrak{z})\, r^{-\mu} \partial\omega_{2n-2} \\
&\quad = \frac{\mu}{W_{2n-2}} \int_{r_0}^{r} t^{-\mu-1} \int_{r_0 \mathfrak{N}}^{t} \nu(\mathfrak{z})\, \partial\omega_{2n-2}\, dt + \frac{n(r) - n(r_0)}{r^{\mu}} \\
&\quad = \mu \int_{r_0}^{r} \frac{n(t) - n(r_0)}{t^{\mu+1}}\, dt + \frac{n(r) - n(r_0)}{r^{\mu}}
\end{aligned}$$

$$\int_{r_0}^{r} \frac{n(t)}{t^{\mu+1}}\, dt = \int_{r_0}^{r} \frac{dN(t)}{t^{\mu}} = \frac{N(r)}{r^{\mu}} - \frac{N(r_0)}{r_0^{\mu}} + \mu \int_{r_0}^{r} \frac{N(t)}{t^{\mu+1}}\, dt.$$

Aus diesen Umformungen folgen die Behauptungen 1 und 2a, c. Der Beweis von 2b ergibt sich von selbst aus den Abschätzungen

$$N(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{n(t)}{t}\, dt \leqq n(r) \log \frac{r}{r_0},$$

$$n(r) \leqq \int_{r}^{e\,r} \frac{n(t)}{t}\, dt \leqq N(e\,r).$$

Nach (1.1) gilt bezüglich der Parallelverschiebung:

$$\begin{aligned}
n(t) &= \frac{1}{V_{2n-2}(t)} \int_{0 \mathfrak{N}}^{t} \nu(\mathfrak{z})\, \partial v_{2n-2}(\mathfrak{z}) \\
&\leqq \left(1 + \frac{|\mathfrak{c}|}{t}\right)^{2n-2} \frac{1}{V_{2n-2}(t + |\mathfrak{c}|)} \int_{\substack{\mathfrak{z} \in \mathfrak{N} \\ |\mathfrak{z}+\mathfrak{c}| \leqq t+|\mathfrak{c}|}} \nu(\mathfrak{z})\, \partial v_{2n-2}(\mathfrak{z}) \\
&\leqq \left(1 + \frac{|\mathfrak{c}|}{t}\right)^{2n-2} \frac{1}{V_{2n-2}(t + |\mathfrak{c}|)} \int_{0 \widetilde{\mathfrak{N}}}^{t+|\mathfrak{c}|} \tilde{\nu}(\tilde{\mathfrak{z}})\, \partial v_{2n-2}(\tilde{\mathfrak{z}}) \\
&\leqq \left(1 + \frac{|\mathfrak{c}|}{t}\right)^{2n-2} \tilde{n}(t + |\mathfrak{c}|).
\end{aligned}$$

Damit erhält man

$$N(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{n(t)}{t}\, dt \leqq \left(1 + \frac{|\mathfrak{c}|}{r_0}\right)^{2n-1} \int_{r_0}^{r} \frac{\tilde{n}(t + |\mathfrak{c}|)}{t + |\mathfrak{c}|}\, dt \leqq \left(1 + \frac{|\mathfrak{c}|}{r_0}\right)^{2n-1} \widetilde{N}(r + |\mathfrak{c}|).$$

Da auch die „umgekehrten" Abschätzungen gelten, erhält man die Behauptung 3 mittels 1. und 2. w. z. b. w.

§ 3. Hilfssätze.

Zunächst werden einige bekannte Hilfssätze zusammengestellt.

Hilfssatz 1 (CARATHÉODORY).

Voraussetzung. *Die Funktion $f(z)$ sei im Kreis $|z|<R$ analytisch. Es werde $M(r)=\operatorname{Max}_{|z|=r}|f(z)|$ und $A(r)=\operatorname{Max}_{|z|=r}\Re f(z)$ gesetzt.*

Behauptung. *Für alle r,ϑ in $0<r<R$ und $0<\vartheta<1$ gilt:*

$$M(\vartheta r)\leq\frac{2}{(1-\vartheta)}\{A(r)+2|f(0)|\}.$$

Zum Beweis siehe LANDAU [4] S. 89.

Hilfssatz 2. *Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz 1 gilt:*

$$\left|\frac{1}{(s-1)!}\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}}f(z)\right|\leq\frac{1}{(1-\vartheta)^s}\frac{M(r)}{r^{s-1}}\quad\text{für}\quad|z|\leq\vartheta r.$$

Hilfssatz 3. *Für eine beliebige Konstante c gilt:*

a) *Wenn $p=3e\,(2+\log q)$ und $q\geq 1$ ist, so gilt:*

$$\log|E(xc,q)|\leq p\frac{|xc|^{q+1}}{1+|xc|}\quad\text{für alle } x.$$

b) *Für jede nichtnegative ganze Zahl μ und q, jedes η und x in $|xc|\leq|c|r<|c|r\eta<1$ gilt:*

$$\left|\frac{1}{\mu!}\frac{d^\mu}{dx^\mu}\{x^{n-1}\log E(xc,q)\}\right|\leq\frac{\eta^n}{(\eta-1)^{\mu+1}}\frac{|cr\eta|^{q+1}}{1-|cr\eta|}r^{n-\mu-1}.$$

c) *Im Nullpunkt ist*

$$\frac{1}{\mu!}\frac{d^\mu}{dx^\mu}\{x^{n-1}\log E(xc,q)\}\Big|_{x=0}=0\quad\text{für}\quad 0\leq\mu\leq n+q-1.$$

Beweis. a) folgt aus [5] Kap. VIII, § 3, S. 214. Die Behauptung c) ergibt sich unmittelbar aus der Abschätzung b). Diese erhält man gemäß Hilfssatz 2 mit $\vartheta=\eta^{-1}$ aus

$$|x^{n-1}\log E(xc,q)|\leq|x|^{n-1}\sum_{\nu=q+1}^{\infty}\frac{1}{\nu}|xc|^\nu\leq\frac{|cr\eta|^{q+1}}{1-|cr\eta|}(r\eta)^{n-1}$$

w. z. b. w.

Hilfssatz 4.

Voraussetzung. *Die nicht abnehmende Funktion $s(r)$ habe die Ordnung $\lambda<\infty$ und verschwinde im Intervall $0\leq r\leq r_0$. Es sei q eine ganze Zahl mit $0\leq q\leq\lambda\leq q+1$, für die das Integral $\int_0^\infty\frac{s(t)}{t^{q+2}}dt$ existiert. Es werde*

$\varkappa = 3e\{\log(1+q) - 2\} \cdot (q+1)$ *gesetzt. Der Funktion* $s(r)$ *werde die Funktion*

$$K(r) = K(r;s) = \varkappa r^q \left\{ \int_0^r \frac{s(t)}{t^{q+1}}\, dt + r \int_r^\infty \frac{s(t)}{t^{q+2}}\, dt \right\}$$

zugeordnet.

Behauptung. *Zwischen den nicht abnehmenden Funktionen* $K(r)$ *und* $s(r)$ *bestehen die Beziehungen:*

$$\begin{aligned} \text{Ord } K(r) &= \text{Ord } s(r), && \textit{falls } q \leqq \lambda \leqq q+1 \textit{ ist,} \\ \text{Typ } K(r) &= \text{Typ } s(r), && \textit{falls } q < \lambda \leqq q+1 \textit{ ist,} \\ \text{Klasse } K(r) &= \text{Klasse } s(r), && \textit{falls } q < \lambda < q+1 \textit{ ist.} \end{aligned}$$

Beweis. Fast überall ist die Funktion $K(r)$ differenzierbar:

$$K'(r) = \varkappa q r^{q-1} \int_0^r \frac{s(t)}{t^{q+1}}\, dt + \varkappa(q+1) r^q \int_r^\infty \frac{s(t)}{t^{q+2}}\, dt \geqq 0.$$

Daher nimmt die monotone Funktion $K(r)$ nicht ab. Aus der Abschätzung

$$K(r) \geqq \varkappa r^{q+1} \int_r^{2r} \frac{s(t)}{t^{q+2}}\, dt \geqq \frac{\varkappa}{q+1} s(r) \left\{ 1 - \frac{1}{2^{q+1}} \right\}$$

folgt, daß die Ordnung von $K(r)$ mindestens so groß, wie die von $s(r)$ ist. Sind die beiden Ordnungen sogar gleich, so folgt, daß die Klasse, bzw. der Typ, von $K(r)$ mindestens so groß wie die Klasse, bzw. der Typ von $s(r)$ ist. Dieser Sachverhalt werde kurz mit „Ord, Typ, Klasse $K(r) \geqq$ Ord, Typ, Klasse $s(r)$" bezeichnet. Für $q < \lambda < q+1$ folgt umgekehrt Ord, Typ, Klasse $K(r) \leqq$ Ord, Typ, Klasse $s(r)$ gemäß [5] Kap. VIII, § 3, S. 216—217. Für $\lambda = q+1$ gehört die Funktion $s(r)$ zur Konvergenzklasse, ist also vom Minimaltyp. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es daher ein R, so daß $s(r) \cdot r^{-q-1} < \varepsilon$ für alle $r > R$ ist. Daher gilt:

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} K(r)\, r^{-q-1} \leqq \overline{\lim_{r\to\infty}} \left\{ \varkappa \int_0^R \frac{s(t)}{t^{q+1}}\, dt + \varkappa \varepsilon + \varkappa \int_r^\infty \frac{s(t)}{t^{q+2}}\, dt \right\} = \varkappa \varepsilon.$$

Der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ zeigt, daß auch $K(r)$ vom Minimaltyp ist, w. z. b. w.

Hilfssatz 5.

Voraussetzung. *Die ganzzahlige Funktion* $\nu(z) \geqq 0$ *verschwinde in jedem Kreis bis auf endlich viele Stellen. Setzt man* $n(r) = \sum_{|z|<r} \nu(z) < \infty$, *so existiere für eine ganze Zahl* $q \geqq 0$ *das Integral* $\int_0^\infty n(t)\, t^{-q-2}\, dt$.

Behauptung. *Für* $|y| \leqq r$ *gilt die Abschätzung:*

$$\sum_{|z|<\infty} \nu(z) \log \left| E\left(\frac{y}{z}; q\right) \right| \leq K(r; n(r)).$$

Zum Beweis siehe für $q \geq 1$ NEVANLINNA [5] Kap. VIII, § 3, S. 215. Für $q = 0$ gilt im Kreis $[|y| \leq r]$ die Abschätzung:

$$\sum_{|z|<\infty} \nu(z) \log \left|1 - \frac{y}{z}\right| \leq \sum_{z<\infty} \nu(z) \log\left(1 + \frac{r}{|z|}\right) = \int_0^\infty \log\left(1 + \frac{r}{t}\right) dn(t)$$

$$= r \int_0^\infty \frac{n(t)}{\left(1 + \frac{r}{t}\right)} \cdot \frac{dt}{t^2} = r \int_0^\infty \frac{n(t)}{t(t+r)}\, dt$$

$$\leq \int_0^r \frac{n(t)}{t}\, dt + r \int_r^\infty \frac{n(t)}{t^2}\, dt < K(r; n(r)),$$

w. z. b. w.

Jetzt werden die beiden grundlegenden Hilfssätze bewiesen.

Hilfssatz 6.

Voraussetzung. *Die Funktion $f(\mathfrak{y})$ sei in der „Kugel" $[|\mathfrak{y}| < R \leq \infty]$ regulär und verschwinde in der kleineren Kugel $[|\mathfrak{y}| \leq r_0]$ mit $r_0 > 0$ nicht.*

Behauptung. *Für $|\mathfrak{y}| < R$ besteht die Abschätzung:*

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (n-1) \int_0^1 (1-\tau)^{n-2} \log |f(\tau\,\mathfrak{y})|\, d\tau \\ \qquad \leq \frac{1}{V_{2n-1}(1)} \int_{|\mathfrak{a}|=1} \log |f((\mathfrak{y}|\mathfrak{a})\cdot\mathfrak{a})\ \partial v_{2n-1}(\mathfrak{a}). \end{array} \right.$$

In der Kugel $[|\mathfrak{y}| \leq r_0]$ gilt (3.1) mit dem Gleichheitszeichen, und zwar sogar ohne Betragszeichen.

Anmerkung. Nach I Hilfssatz 1 ist

$$(3.2) \quad \frac{1}{V_{2n-1}(1)} \int_{|\mathfrak{a}|=1} \log f((\mathfrak{y}|\mathfrak{a})\,\mathfrak{a})\ \partial v_{2n-1}(\mathfrak{a}) = \frac{1}{W_{2n-2}} \int_{\mathfrak{a} \in \varrho} \log f((\mathfrak{y}|\mathfrak{a})\,\mathfrak{a})\ \partial \omega_{2n-2}(\mathfrak{a}).$$

Beweis. Der Vektor $\mathfrak{y}$ werde in der Kugel $[|\mathfrak{y}| < R]$ beliebig, aber fest gewählt. Von dem vorgegebenen, normalen Koordinatensystem $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ kann man zu einem Koordinatensystem $\mathfrak{e}'_1, \ldots, \mathfrak{e}'_n$ übergehen, in dem $\mathfrak{y} = y\,\mathfrak{e}'_n$ gilt, und das wieder normal ist. Daher kann man o. B. d. A. den Vektor $\mathfrak{y}$ in der Gestalt $\mathfrak{y} = y\,\mathfrak{e}_n$ annehmen, wobei $|\mathfrak{y}| = |y| < R$ ist.

Die Existenz des rechten Integrals in (3.1) kann man auf verschiedene Arten beweisen. Sie soll hier gleich mitbewiesen werden. Dazu setzt man

$$(3.3) \quad \lambda_\varrho(\mathfrak{z}) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ für } \left|f\left(\frac{(\mathfrak{y}|\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}|\mathfrak{z})}\,\mathfrak{z}\right)\right| < \varrho \\ 1 \text{ für } \left|f\left(\frac{(\mathfrak{y}|\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}|\mathfrak{z})}\,\mathfrak{z}\right)\right| \geq \varrho \end{array} \right\} \text{ in } |\mathfrak{z}| < \infty \text{ und } 0 < \varrho < 1.$$

Für jede komplexe Zahl $x \neq 0$ gilt $\lambda_\varrho(x\,\mathfrak{z}) = \lambda_\varrho(\mathfrak{z})$. Die Funktion

$$\lambda_\varrho(\mathfrak{a}) \log |f((\mathfrak{y}|\mathfrak{a})\,\mathfrak{a})|$$

ist auf der Einheitskugel meßbar und beschränkt. Nach I Hilfssatz 1 gilt:

$$(3.4)\qquad \begin{cases} I_\varrho = \dfrac{1}{V_{2n-1}(1)} \displaystyle\int_{|\mathfrak{a}|=1} \lambda_\varrho(\mathfrak{a}) \log |f((\mathfrak{y}|\mathfrak{a})\,\mathfrak{a})|\, \partial v_{2n-1} \\ \quad = \dfrac{1}{\pi^n} \displaystyle\int_{|\mathfrak{z}|<\infty} \lambda_\varrho(\mathfrak{z})\, e^{-|\mathfrak{z}|^2} \log \left| f\left(\frac{(\mathfrak{y}|\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}|\mathfrak{z})}\,\mathfrak{z}\right)\right| \partial v_{2n}. \end{cases}$$

In das letzte Integral führt man die Substitution

$$z_1 = u\,x_1, \ldots, z_{n-1} = u\,x_{n-1}, z_n = u \quad \text{d.h.} \quad x_1 = \frac{z_1}{z_n}, \ldots, x_{n-1} = \frac{z_{n-1}}{z_n}, u = z_n$$

ein. Dann wird $\partial\mathfrak{z} = \partial(u\,\mathfrak{x} + u\,\mathfrak{e}_n) = \partial u(\mathfrak{x} + \mathfrak{e}_n) + u\,\partial\mathfrak{x}$. Also gilt:

$$(\partial\mathfrak{z}|\partial\mathfrak{z}) = \partial u\,\partial\bar{u}\,(1 + |\mathfrak{x}|^2) + \bar{u}\,\partial u(\mathfrak{x}|\partial\mathfrak{x}) + u\,(\partial\mathfrak{x}|\mathfrak{x})\,\partial\bar{u} + u\bar{u}(\partial\mathfrak{x}\cdot\partial\mathfrak{x}).$$

Da der Vektor $\mathfrak{x}$ nur von $(n-1)$ Veränderlichen abhängt, wird

$$\begin{aligned} \partial v_{2n}(\mathfrak{z}) &= \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{n!} (\partial\mathfrak{z}|\partial\mathfrak{z})^n \\ &= \left(\frac{i}{2}\right)^n \sum_{\mu+\nu+\varrho+\sigma=n} (\mu!\,\nu!\,\varrho!\,\sigma!)^{-1} \{\partial u\,\partial\bar{u}\,(1 + |\mathfrak{x}|^2)\}^\mu \times \\ &\quad \times \{\bar{u}\,\partial u(\mathfrak{x}|\partial\mathfrak{x})\}^\nu \{u(\partial\mathfrak{x}|\mathfrak{x})\,\partial\bar{u}\}^\varrho \{u\bar{u}(\partial\mathfrak{x}|\partial\mathfrak{x})\}^\sigma \\ &= \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{(n-1)!} (u\bar{u})^{n-1}(1 + |\mathfrak{x}|^2)\,\partial u\,\partial\bar{u}\,(\partial\mathfrak{x}|\partial\mathfrak{x})^{n-1} + \\ &\quad + \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{(n-2)!} (u\bar{u})^{n-1}\partial u(\mathfrak{x}|\partial\mathfrak{x})\,(\partial\mathfrak{x}|\mathfrak{x})\,\partial\bar{u}(\partial\mathfrak{x}|\partial\mathfrak{x})^{n-2}. \end{aligned}$$

Da aber

$$(\mathfrak{x}|\partial\mathfrak{x})\,(\partial\mathfrak{x}|\mathfrak{x})\,\frac{(\partial\mathfrak{x}|\partial\mathfrak{x})^{n-2}}{(n-2)!} = -\sum_{\varrho,\sigma=1}^{n-1} \bar{x}_\varrho\, x_\sigma\, \partial x_\varrho\, \partial\bar{x}_\sigma \sum_{\mu=1}^{n-1} \partial x_1\, \partial\bar{x}_1 \ldots {}^{\mu} \ldots \partial x_{n-1}\, \partial\bar{x}_{n-1}$$

$$= -\sum_{\mu=1}^{n-1} x_\mu \bar{x}_\mu\, \partial x_1\, \partial\bar{x}_1 \ldots \partial x_{n-1}\, \partial\bar{x}_{n-1}$$

$$= -|\mathfrak{x}|^2 \frac{(\partial\mathfrak{x}|\partial\mathfrak{x})^{n-1}}{(n-1)!}$$

ist, erhält man

$$\partial v_{2n}(\mathfrak{z}) = \frac{i}{2}\,|u|^{2n-2}\,\partial u\,\partial\bar{u}\,\partial v_{2n-2}(\mathfrak{x}).$$

Der $(2n-4)$ dimensionale, projektive Raum $\mathfrak{P}^{2n-4}$ sei nach I § 3b auf der Einheitskugel $[|\mathfrak{x}| = 1]$ durch Q^* dargestellt. Weil $(\mathfrak{y}|\mathfrak{z}) = y\,\bar{z}_n = y\,\bar{u}$ und

$\lambda_\varrho(\mathfrak{z}) = \lambda_\varrho(x\,\mathfrak{z})$ für $x \neq 0$ ist, gilt [vgl. (I.3.18), (I.3.19)]:

$$
(3.5)\quad \left\{\begin{aligned}
I_\varrho &= \frac{1}{\pi^n}\int\limits_{|\mathfrak{x}|<\infty}\left\{\int\limits_{|u|<\infty}|u|^{2n-2}\,e^{-|u|^2(|\mathfrak{x}|^2+1)}\,\frac{i}{2}\,\partial u\,\partial\bar{u}\right\}\times\\
&\quad\times\lambda_\varrho(\mathfrak{x},1)\log\left|f\left(\frac{y}{|\mathfrak{x}|^2+1}\,\mathfrak{x},\,\frac{y}{|\mathfrak{x}|^2+1}\right)\right|\partial v_{2n-2}(\mathfrak{x})\\
&= \frac{(n-1)!}{\pi^{n-1}}\int\limits_{|\mathfrak{x}|<\infty}\frac{1}{(|\mathfrak{x}|^2+1)^n}\,\lambda_\varrho(\mathfrak{x},1)\times\\
&\quad\times\log\left|f\left(\frac{y}{|\mathfrak{x}|^2+1}\,\mathfrak{x},\,\frac{y}{|\mathfrak{x}|^2+1}\right)\right|\partial v_{2n-2}(\mathfrak{x})\\
&= \frac{(n-1)!}{\pi^{n-2}}\int\limits_0^\infty\frac{t^{n-2}}{(t+1)^n}\left[\int\limits_{\mathfrak{a}\in Q^*}\times\right.\\
&\quad\left.\times\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\lambda_\varrho\left(\sqrt{t}\,e^{i\varphi}\,\mathfrak{a},1\right)\log\left|f\left(\frac{\sqrt{t}\,e^{i\varphi}y}{t+1}\,\mathfrak{a},\,\frac{y}{t+1}\right)\right|d\varphi\right\}\partial\omega_{2n-4}\right]dt,
\end{aligned}\right.
$$

wobei im letzten Integral $\mathfrak{x} = \sqrt{t}\,e^{i\varphi}\,\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a}\in Q^*$ gesetzt wurde. Die Funktion $f(0,\ldots,0,x)$ ist im Kreis $[|x|<R]$ analytisch und verschwindet wegen $f(0,\ldots,0)\neq 0$ nicht identisch. Die Funktion $f\left(\frac{\sqrt{t}\,z\,y}{t+1}\,\mathfrak{a},\,\frac{y}{t+1}\right)$ ist als Funktion der einen Veränderlichen z im Einheitskreis analytisch, und verschwindet bis auf endlich viele Werte t im Nullpunkt der z-Ebene nicht. Daher gilt:

$$
(3.6)\quad \left\{\begin{aligned}
\log\left|f\left(\frac{\mathfrak{y}}{t+1}\right)\right| &= \log\left|f\left(0,\ldots,0,\frac{y}{t+1}\right)\right|\\
&\leqq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log\left|f\left(\frac{\sqrt{t}\,e^{i\varphi}\,y}{t+1}\,\mathfrak{a},\frac{y}{t+1}\right)\right|d\varphi
\end{aligned}\right.
$$

bis auf endlich viele Werte t. Weil $0\leqq\lambda_\varrho\leqq 1$ ist, und weil für positive Werte von $\log|f|$ auch $\lambda_\varrho = 1$ ist, ergibt sich

$$
(3.7)\qquad \log\left|f\left(\frac{\mathfrak{y}}{t+1}\right)\right| \leqq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\lambda_\varrho\left(\sqrt{t}\,e^{i\varphi}\,\mathfrak{a},1\right)\log\left|f\left(\frac{\sqrt{t}\,e^{i\varphi}\,y}{t+1}\,\mathfrak{a},\,\frac{y}{t+1}\right)\right|d\varphi.
$$

Weil $\log\left|f\left(\frac{\mathfrak{y}}{t+1}\right)\right|$ unabhängig von $\mathfrak{a}$, und weil $W_{2n-4} = \frac{\pi^{n-2}}{(n-2)!}$ ist, erhält man mit (3.5) und (3.7) die Abschätzung

$$
(3.8)\quad \left\{\begin{aligned}
I_\varrho &\geqq \frac{(n-1)!}{\pi^{n-2}}\,W_{2n-4}\int\limits_0^\infty\frac{t^{n-2}}{(1+t)^n}\log\left|f\left(\frac{\mathfrak{y}}{t+1}\right)\right|dt\\
&= (n-1)\int\limits_0^1(1-\tau)^{n-2}\log|f(\tau\,\mathfrak{y})|\,d\tau.
\end{aligned}\right.
$$

Würde die Funktion $f((\mathfrak{y}|\mathfrak{a})\,\mathfrak{a})$ auf einer Menge von positivem Maß auf der Einheitskugel $[|\mathfrak{a}|=1]$ verschwinden, so würde nach der vorangehenden

Rechnung auch $F(\mathfrak{w}) = f\left(\frac{\sqrt{t}\,y}{t+1}\,\mathfrak{w}, \frac{y}{t+1}\right)$ als Funktion von $\mathfrak{w}$ auf einer Menge von positivem Maß auf der Einheitskugel verschwinden, und dies für eine Menge von Werten t die selbst positives Maß hat. Da die Funktion $F(\mathfrak{w})$ analytisch ist, würde sie identisch für diese Werte t verschwinden. Dann wäre $f\left(0, \ldots, 0, \frac{y}{t+1}\right) = 0$ für mehr als abzählbar viele Werte t, d. h. $f(0, \ldots, 0, x) \equiv 0$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung $f(0, \ldots, 0, 0) \neq 0$ ist. Die Funktion $\log|f(\mathfrak{y}|\mathfrak{a})\,\mathfrak{a})|$ ist abgesehen von einer Nullmenge auf der Einheitskugel stetig. Es strebt monoton $\lambda_\varrho(\mathfrak{a}) \log|f((\mathfrak{y}|\mathfrak{a})\,\mathfrak{a})| \searrow \log|f((\mathfrak{y}|\mathfrak{a})\,\mathfrak{a})|$ für $\varrho \to +0$ fast überall auf der Einheitskugel $[|\mathfrak{a}| = 1]$. Da die Integrale I_ϱ nach unten beschränkt sind, so strebt

$$I_\varrho \to I = \frac{1}{V_{2n-1}(1)} \int_{|\mathfrak{a}|=1} \log|f((\mathfrak{y}|\mathfrak{a})\,\mathfrak{a})|\,\partial v_{2n-1}(\mathfrak{a}) \quad \text{für } \varrho \to +0.$$

Dies ergibt die behauptete Ungleichung (3.1). Wenn jedoch $|\mathfrak{y}| \leqq r_0$ ist, so führt man die ganze Rechnung mit $\lambda_\varrho \equiv 1$ durch. Überall gelten die Gleichheitszeichen. Die Rechnung bleibt auch für $\log f$ statt $\log|f|$ richtig, w. z. b. w.

Hilfssatz 7.

Voraussetzung. *Die Funktion $f(\mathfrak{y})$ sei in der Kugel $|\mathfrak{y}| < R$ analytisch mit $f(0) = 1$. Die Vielfachheit der Nullstelle $\mathfrak{z}$ bezüglich der Funktion f sei $\nu(\mathfrak{z})$. Für $n = 1$ werde $n(r) = \sum_{|z| \leqq r} \nu(\mathfrak{z})$, für $n > 1$ werde $n(r) = \int_{0\mathfrak{R}}^{r} \nu(\mathfrak{z})\,\partial\omega_{2n-2}$ und in beiden Fällen $N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt$ gesetzt. Für eine beliebige natürliche Zahl $m \geqq 2$ sei*

$$F(\mathfrak{y}) = (m-1)\int_0^1 (1-\tau)^{m-2} \log|f(\tau\,\mathfrak{y})|\,d\tau.$$

Weiter werde $M(r) = \operatorname{Max}_{|\mathfrak{y}| \leqq r} |f(\mathfrak{y})|$ und $H(r) = \operatorname{Max}_{|\mathfrak{y}| \leqq r} F(\mathfrak{y})$ abgekürzt.

Behauptung. *Für jede Zahl ϑ und r in $0 < \vartheta < 1$ und $0 < r < R$ gilt:*

$$\log M(\vartheta^3 r) \leqq \frac{4}{(1-\vartheta)^{m+2n}} [H(r) + (2m-1)\,n(r) + N(r)], \tag{3.9}$$

$$\log M\left(\frac{r}{4}\right) \leqq 8^{m+2n-1} [H(r) + n(r) + N(r)]. \tag{3.10}$$

Beweis. Wenn, im Falle $n = 1$, $g(y) = \prod_{|z| \leqq r} \left(1 - \frac{y}{z}\right)^{\nu(z)}$ und $h(y) = f(y)\,g^{-1}(y)$ gesetzt wird, so ist $\log h(y)$ durch $\log h(0) = 0$ eindeutig als analytische Funktion erklärt. Im Kreis $|y| \leqq r$ gilt die Abschätzung:

$$\left\{ \begin{aligned} &(m-1)\int_0^1 (1-\tau)^{m-2} \log|h(\tau\,y)|\,d\tau \\ &\qquad \leqq H(r) - (m-1)\int_0^1 (1-\tau)^{m-2} \log|g(\tau\,y)|\,d\tau. \end{aligned} \right. \tag{3.11}$$

Mit $x = r/|z|$ und $|y| = r$ erhält man für $m = 2$ die Ungleichung:

$$\begin{aligned}(m-1)\int_0^1 (1-\tau)^{m-2} \log\left|1-\frac{\tau y}{z}\right| d\tau &\geq \int_0^1 \log|1-\tau x|\, d\tau \\ &\geq \frac{x-1}{x}\{\log|1-x|-1\} - \frac{1}{x} \\ &\geq -\frac{2}{x} \\ &\geq -\frac{2(m-1)}{r}|z|.\end{aligned}$$

Für $m > 2$ erhält man:

$$\left\{\begin{aligned}&(m-1)\int_0^1 (1-\tau)^{m-2}\log\left|1-\frac{\tau y}{z}\right| d\tau \geq (m-1)\int_0^1 (1-\tau)^{m-2}\log|1-\tau x|\, d\tau \\ &\geq (m-1)(m-2)\cdot\int_0^1 (1-t)^{m-3}\left\{\int_0^t \log|1-\tau x|\, d\tau\right\} dt \\ &\geq (m-1)(m-2)\, x^{-1}\int_0^1 (1-t)^{m-3}\{(tx-1)(\log|1-tx|-1)-1\}\, dt \\ &\geq (m-1)(m-2)\, x^{-1}\int_0^1 (1-t)^{m-3}(-2)\, dt \\ &\geq -\frac{2m-2}{r}|z|.\end{aligned}\right. \tag{3.13}$$

Addition ergibt:

$$\left\{\begin{aligned}&-(m-1)\int_0^1 (1-\tau)^{m-2}\log|g(\tau y)|\, d\tau \\ &\quad = -(m-1)\sum_{|z|\leq r} \nu(z)\int_0^1 (1-\tau)^{m-2}\log\left|1-\tau\frac{y}{z}\right| d\tau \\ &\quad \leq \frac{2m-2}{r}\sum_{|z|<r}\nu(z)\,|z| \\ &\quad \leq 2(m-1)\,n(r).\end{aligned}\right. \tag{3.14}$$

Da der Realteil einer analytischen Funktion sein Maximum auf dem Rand annimmt, folgt aus (3.11) und (3.14) die Abschätzung

$$\left\{\begin{aligned}&\Re\frac{(m-1)!}{y^{m-1}}\int_0^y\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_{m-2}} \log h(x_{m-1})\, dx_{m-1}\ldots dx_1 \\ &\quad = (m-1)\int_0^1 (1-\tau)^{m-2}\log|h(\tau y)|\, d\tau \\ &\quad \leq H(r) + 2(m-1)\,n(r).\end{aligned}\right. \tag{3.15}$$

Wendet man jetzt Hilfssatz 1 an, so gewinnt man wegen $h(0)=1$ in $|y|\leqq\vartheta r<r$ die Ungleichung

$$\left|(m-1)!\int_0^y\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_{m-2}}\log h(x_{m-1})\,dx_{m-1}\ldots dx_1\right| \leqq\frac{2(\vartheta r)^{m-1}}{1-\vartheta}\{H(r)+2(m-1)n(r)\}.$$

Für $|y|\leqq\vartheta^2 r$ folgt aus Hilfssatz 2

$$(3.16)\quad\left\{\begin{aligned}\log|h(y)|&\leqq|\log h(y)|\\&\leqq\frac{1}{(1-\vartheta)^m}\,\frac{1}{(\vartheta r)^{m-1}}\,\frac{2(\vartheta r)^{m-1}}{1-\vartheta}\{H(r)+2(m-1)n(r)\}\\&\leqq\frac{2}{(1-\vartheta)^{m+1}}\{H(r)+2(m-1)n(r)\}.\end{aligned}\right.$$

Andererseits gilt im Kreis $|y|\leqq\vartheta^2 r$ die Abschätzung

$$(3.17)\quad\left\{\begin{aligned}\log\,|g(y)|&\leqq\sum_{|z|\leqq r}\nu(z)\log\left|1+\frac{r}{z}\cdot\right|=\int_0^r\log\left(1+\frac{r}{t}\right)dn(t)\\&=r\int_0^r\frac{n(t)}{t(t+r)}\,dt+n(r)\log 2\leqq\int_0^r\frac{n(t)}{t}\,dt+n(r)=N(r)+n(r).\end{aligned}\right.$$

Da $f(y)=g(y)\,h(y)$ war, folgt aus (3.16) und (3.17) insgesamt

$$(3.9')\qquad\log|f(y)|\leqq\frac{2}{(1-\vartheta)^{m+1}}\{H(r)+(2m-1)n(r)+N(r)\}$$

für $|y|\leqq\vartheta^2 r$. Dies ist (3.9). Setzt man $\vartheta=\frac{1}{2}$, so folgt leicht (3.10).

Ist $n\geqq 2$, so wendet man (3.9') auf die Funktion $f(y\,\mathfrak{a})$ mit $|\mathfrak{a}|=1$ an, wobei die Funktionen H, n, N von $\mathfrak{a}$ abhängen: $H(r,\mathfrak{a})$, $n(r,\mathfrak{a})$ und $N(r,\mathfrak{a})$. Wegen $n(r)=\frac{1}{V_{2n-1}(1)}\int_{|\mathfrak{a}|=1}n(r,\mathfrak{a})\,\partial v_{2n-1}$, $N(r)=\frac{1}{V_{2n-1}(1)}\int_{|\mathfrak{a}|=1}N(r,\mathfrak{a})\,\partial v_{2n-1}$ und $\log M(\vartheta r)\leqq\frac{1+\vartheta}{(1-\vartheta)^{2n-1}}\,\frac{1}{V_{2n-1}(r)}\int_{|\mathfrak{y}|=r}\log^+|f(\mathfrak{y})|\,\partial v_{2n-1}$[7]) folgt aus (3.9') sofort (3.9). Setzt man $\delta=1/\sqrt[3]{4}$, so folgt leicht (3.10), w. z. b. w.

Satz 2. *Eine ganze Funktion f und ihr Betragsmaximum $M(r)=\max_{|\mathfrak{z}|\leqq r}|f(\mathfrak{z})|$ stimmen in Ordnung, Typ und Klasse überein.*

Beweis. Wählt man $\alpha_1=0$, $\alpha_2=1$, so folgt aus (1.3) und (1.7)

$$(3.18)\quad\left\{\begin{aligned}T(r)=m(r,\infty)-m(r_0,\infty)&\leqq\frac{1}{V_{2n-1}(r)}\int_{|\mathfrak{z}|=r}\log\,|\overline{1-|f|^2}\,\partial v_{2n-1}\\&\leqq\log^+M(r)+\frac{1}{2}\log 2.\end{aligned}\right.$$

Eine umgekehrte Abschätzung ist nicht so leicht zu beweisen. Dazu werden die beiden genannten Hilfssätze gebraucht. Ist $m(r,a,\mathfrak{a})$ die Schmiegungs-

[7]) Dies wird genau so wie bei H. KNESER [3] §6 bewiesen.

funktion von $f(z\,\mathfrak{a})$ als Funktion in z, so hat nach H. KNESER [3] § 4 die Funktion f die Schmiegungsfunktion

$$(3.19)\qquad m(r,a)=\frac{1}{V_{2n-1}}\int\limits_{|\mathfrak{a}|=1} m(r,a,\mathfrak{a})\,\partial v_{2n-1}=\frac{1}{W_{2n-2}}\int\limits_{\mathfrak{a}\in Q} m(r,a,\mathfrak{a})\,\partial\omega_{2n-2}.$$

Für $f(z\,\mathfrak{a})$ gilt in $|z|\leqq r<\varrho$ mit $\mathfrak{a}\in Q$ die Abschätzung[8])

$$(3.20)\qquad \log|f(z\,\mathfrak{a})|\leqq\frac{\varrho+r}{\varrho-r}\{m(\varrho,\infty,\mathfrak{a})+\log 2\}.$$

Setzt man $z=(\mathfrak{y}|\mathfrak{a})$ und $\varrho=2r$, so gibt die Integration über Q

$$(3.21)\qquad \frac{1}{W_{2n-2}}\int\limits_{\mathfrak{a}\in Q}\log|f((\mathfrak{y}|\mathfrak{a})\,\mathfrak{a})|\,\partial\omega_{2n-2}\leqq 3\,m(2r,\infty)+3\log 2.$$

Die Hilfssätze 6 und 7 geben die Abschätzung

$$(3.22)\qquad \begin{cases}\log M(r)\leqq 8^{3n}\{3\,m(8r,\infty)+3\log 2+N(4r,0)+n(4r,0)\}\\ \qquad\leqq 5\cdot 8^{3n}\{T(8er)+m(r_0,\infty)+m(r_0,0)+\log 2\}.\end{cases}$$

Wenn $\log M(r)$ nicht beschränkt ist, so folgt aus (3.18) und (3.22) die Behauptung. Wenn $\log M(r)$ beschränkt ist, so ist sie trivial, w. z. b. w.

§ 4. Ein Analogon zum WEIERSTRASSschen Produktsatz.

Die erste Aufgabe, die in § 1 gestellt wurde, kann jetzt sogar für Nullstellenflächen mit beliebigem Grenzexponenten $\varrho\leqq\infty$ gelöst werden.

Satz 3. WEIERSTRASSscher Produktsatz.

Voraussetzung. *Die abgeschlossene Nullstellenfläche $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{R}^{2n}$ habe die Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$. Für ein $r_0>0$ sei $\mathfrak{N}_{0r_0}$ leer.*

Behauptung.

1. *Es gibt eine Funktion $q(r)$ mit den Eigenschaften*

a) *Es ist $q(r)\geqq 0$, nicht abnehmend und ganzzahlig.*

b) *Für jedes feste r existiert das Integral:*

$$(4.1)\qquad \frac{1}{W_{2n-2}}\int\limits_{\mathfrak{N}}\nu(\mathfrak{z})\left(\frac{r}{|\mathfrak{z}|}\right)^{q(|\mathfrak{z}|)+1}\partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{z})<\infty.$$

2. *Wenn $q(r)$ irgendeine Funktion ist, die die in 1. genannten Eigenschaften besitzt, so gibt es eine ganze Funktion $h(\mathfrak{y})$, die auf $\mathfrak{N}$ und nur auf $\mathfrak{N}$ verschwindet, und zwar mit der Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$, und für die in der Kugel $[|\mathfrak{y}|\leqq r_0]$ gilt:*

$$(4.2)\qquad \log h(\mathfrak{y})=\frac{1}{W_{2n-2}}\int\limits_{\mathfrak{N}}\nu(\mathfrak{z})\,e\left(\frac{(\mathfrak{y}|\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}|\mathfrak{z})},q(|\mathfrak{z}|)\right)\partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{z})\ ^{9}).$$

---

[8]) Vergleiche [5] Kap. VIII, § 1, S. 208 und Kap. VI, § 3, Nr. 139, S. 165.

[9]) Die Funktion $e(x,q)$ ist auf S. 212, Gl. (1.8) erklärt.

Beweis. Nach dem zweiten Satz von COUSIN gibt es eine ganze Funktion $f(\mathfrak{z})$, die auf $\mathfrak{N}$ und nur auf $\mathfrak{N}$ verschwindet, und zwar mit der Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$. Sie werde zu $f(0)=1$ normiert und für den gesamten Beweis fest gewählt. Es sei $M(r)=\max_{|\mathfrak{z}|\leq r}|f(\mathfrak{z})|$. Man definiert die ganze Zahl $q(r)$ eindeutig durch $q(r)\leqq \log M(e\,r)+1<q(r)+1$. Wenn $n(r,a;\mathfrak{a})$ bzw. $N(r,a;\mathfrak{a})$ die Anzahlfunktion von $f(z\,\mathfrak{a})$ ist, so gilt nach der JENSENschen Formel

$$n(r,0;\mathfrak{a})\leqq \int_{r_0}^{e\,r}\frac{n(t,0;\mathfrak{a})}{t}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(e\,r\,e^{i\varphi}\,\mathfrak{a})|\,d\varphi\leqq \log M(e\,r)<q(r).$$

Die Nullstellen z_ν der Funktion $f(z\,\mathfrak{a})$ mit dem festen Vektor $\mathfrak{a}$ werden monoton angeordnet: $|z_\nu|\leqq|z_{\nu+1}|$. Dabei wird jede Nullstelle so oft gezählt, als ihre Vielfachheit $\nu(z,0;\mathfrak{a})$ angibt. Wählt man $R>R_1\geqq 2r$, so ist

$$\sum_{R_1\leqq|z|\leqq R}\nu(z,0;\mathfrak{a})\left(\frac{r}{|z|}\right)^{q(|z|)+1}=\sum_{R_1\leqq|z_\nu|\leqq R}\left(\frac{r}{|z_\nu|}\right)^{q(|z_\nu|)+1}\leqq\frac{r}{R_1}\sum_{R_1\leqq|z_\nu|\leqq R}\left(\frac{1}{2}\right)^{q(|z_\nu|)}$$

$$\leqq\frac{r}{R_1}\sum_{R_1\leqq|z_\nu|\leqq R}\left(\frac{1}{2}\right)^{n(|z_\nu|,0;\mathfrak{a})}\leqq\frac{r}{R_1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu}=\frac{2r}{R_1}.$$

Also konvergiert die Reihe $\sum_{|z|<\infty}\nu(z,0;\mathfrak{a})\left(\frac{r}{|z|}\right)^{q(|z|)+1}\leqq\frac{2r}{r_0}$ in $\mathfrak{a}\in\overline{Q}$ gleichmäßig. Aus I Satz 9 folgt dann:

$$\frac{1}{W_{2n-2}}\int_{\mathfrak{a}\in Q}\sum_{|z|<\infty}\nu(z,0;\mathfrak{a})\left(\frac{r}{|z|}\right)^{q(|z|)+1}\partial\omega_{2n-2}=\frac{1}{W_{2n-2}}\int_{\mathfrak{N}}\nu(\mathfrak{z})\left(\frac{r}{|\mathfrak{z}|}\right)^{q(|\mathfrak{z}|)+1}\partial\omega_{2n\ \ 2}.$$

Es ist $q(r)\geqq 0$, nicht abnehmend und ganzzahlig. Die erste Behauptung ist bewiesen.

2. Die Aussagen 1a und b werden jetzt vorausgesetzt. Dann folgt aus I Satz 9

$$\infty>\frac{1}{W_{2n-2}}\int_{\mathfrak{N}}\nu(\mathfrak{z})\left(\frac{r}{|\mathfrak{z}|}\right)^{q(|\mathfrak{z}|)+1}\partial\omega_{2n-2}$$

$$=\frac{1}{W_{2n-2}}\int_{\mathfrak{a}\in Q}\sum_{z<\infty}\nu(z,0;\mathfrak{a})\left(\frac{r}{|z|}\right)^{q(|z|)+1}\partial\omega_{2n\ \ 2}.$$

Daher konvergiert die Reihe $\sum_{|z|<\infty}\nu(z,0;\mathfrak{a})\left(\frac{r}{|z|}\right)^{q(|z|)+1}$ für fast alle Vektoren $\mathfrak{a}\in Q$ d.h. alle $\mathfrak{a}\in Q-N_r$. Die Nullmengen $N_r\subseteqq N_{r'}$ wachsen monoton mit $r<r'$. Daher ist ihre Vereinigung $N=\bigcup_{r\geq 0}N_r$ wieder eine Nullmenge. Die Reihe konvergiert für alle r und für alle Vektoren $\mathfrak{a}\in Q-N$. Für diese Vektoren $\mathfrak{a}$ gilt der WEIERSTRASSsche Produktsatz:

$$\log f(x\,\mathfrak{a})=g(x;\mathfrak{a})+\sum_{|z|<\infty}\nu(z,0;\mathfrak{a})\log E\left(\frac{x}{z},q(|z|)\right)\tag{4.3}$$

für alle komplexen x. Die Funktion $g(x;\mathfrak{a})$ ist bei festem Vektor $\mathfrak{a}\in Q-N$ ganz in x. Es gilt $g(0;\mathfrak{a})=0$. Der Betrag $|g|$ soll abgeschätzt werden. Zunächst ist

$$\int_0^1 \log\left|E\left(\frac{x\tau}{z},q\right)\right|d\tau = \int_0^1 \log\left|1-\frac{x}{z}\tau\right|d\tau + \Re\mathfrak{e}\sum_{\nu=1}^{q}\frac{1}{\nu(\nu+1)}\left(\frac{x}{z}\right)^{\nu}$$
$$\geqq -2\left|\frac{z}{x}\right| - 1 - \left|\frac{x}{z}\right|^{q}.$$

Da $\log|E(u,q)|\leqq \frac{|u|^{q+1}}{1-|u|}$ für $|u|<1$ ist, gilt für $|x|=r$ die Abschätzung

$$\Re\mathfrak{e}\int_0^1 g(\tau x;\mathfrak{a})\,d\tau = \int_0^1 \log|f(x\tau\mathfrak{a})|\,d\tau - \int_0^1\sum_{|z|<\infty}\nu(z)\log\left|E\left(\frac{x\tau}{z},q(|z|)\right)\right|d\tau$$
$$\leqq \log M(r) + \sum_{|z|<2r}\nu(z,0;\mathfrak{a})\left\{2\left|\frac{z}{x}\right| + 1 + \left|\frac{x}{z}\right|^{q}\right\} + \sum_{|z|\geq 2r}\nu(z,0;\mathfrak{a})\left|\frac{x}{z}\right|^{q+1}\frac{1}{1-|x/z|}$$
$$\leqq \log M(r) + \left\{5+\left(\frac{r}{r_0}\right)^{q(2r)}\right\}n(r,0;\mathfrak{a}) + 2\sum_{|z|<\infty}\nu(z,0;\mathfrak{a})\left|\frac{r}{z}\right|^{q(|z|)+1} = L(r;\mathfrak{a}).$$

Die Funktion $L(r;\mathfrak{a})$ ist über Q integrierbar. Wendet man Hilfssatz 7 mit $m=2$ und Hilfssatz 1 mit $\vartheta=\frac{1}{2}$ auf $e^{g(y;\mathfrak{a})}$ an, so wird

$$|g(x;\mathfrak{a})|\leqq 2^{10}L(8r;\mathfrak{a}) \quad \text{für alle } |x|\leqq r,$$

$$|g((\mathfrak{y}|\mathfrak{a});\mathfrak{a})|\leqq 2^{10}L(8r;\mathfrak{a}) \quad \text{für alle } |\mathfrak{y}|\leqq r \text{ und } \mathfrak{a}\in Q-N. \tag{4.4}$$

Nach (4.4) existiert dann auch das Integral

$$\frac{1}{W_{2n-2}}\int_{\mathfrak{a}\in Q} g((\mathfrak{y}|\mathfrak{a});\mathfrak{a})\,\partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{a}) = H(\mathfrak{y}). \tag{4.5}$$

Weil die Funktion $g((\mathfrak{y},\mathfrak{a});\mathfrak{a})$ ganz in $\mathfrak{y}$ ist, und nach (4.4) gleichmäßig abgeschätzt wird, ist auch das Integral $H(\mathfrak{y})$ analytisch in der Kugel $[|\mathfrak{y}|<r]$. Da aber r beliebig gewählt war, ist $H(\mathfrak{y})$ sogar eine ganze Funktion.

Da die Nullstellenfläche $\mathfrak{N}$ abgeschlossen und $\mathfrak{N}_{0r_0}$ leer ist, gibt es eine Zahl $r_1>r_0$, für die $\mathfrak{N}_{0r_1}$ ebenfalls leer ist. Für $\mathfrak{z}\in\mathfrak{N}$ und $|\mathfrak{y}|\leqq r_0$ kann man also

$$\left|\nu(\mathfrak{z})\cdot\log E\left(\frac{(\mathfrak{y},\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}|\mathfrak{z})},q(|\mathfrak{z}|)\right)\right| \leqq \frac{\nu(\mathfrak{z})\left(\frac{r_0}{|\mathfrak{z}|}\right)^{q(|\mathfrak{z}|)+1}}{1-\frac{r_0}{r_1}} \tag{4.6}$$

abschätzen. Da das Integral in (4.1) existiert, folgt aus (4.6) und I Satz 9 die Integralumformung

$$\left\{\frac{1}{W_{2n-2}}\int_{\mathfrak{a}\in Q}\left\{\sum_{|z|<\infty}\nu(z,0;\mathfrak{a})\log E\left(\frac{(\mathfrak{y}|\mathfrak{a})}{z},q\right)\right\}\partial\omega_{2n-2}\right.$$
$$\left.= \frac{1}{W_{2n-2}}\int_{\mathfrak{N}}\nu(\mathfrak{z})\log E\left(\frac{(\mathfrak{y}|\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}|\mathfrak{z})},q(|\mathfrak{z}|)\right)\partial\omega_{2n-2}.\right. \tag{4.7}$$

In der Kugel $[|\mathfrak{y}| \leqq r_0]$ gilt andererseits nach Hilfssatz 6 Anmerkung:

$$(4.8) \qquad \frac{1}{W_{2n-2}} \int\limits_{\mathfrak{a} \in Q} \log f((\mathfrak{y}|\mathfrak{a})\,\mathfrak{a})\, \partial\omega_{2n-2} = (n-1) \int\limits_0^1 (1-\tau)^{n-2} \log f(\tau\,\mathfrak{y})\, d\tau .$$

In (4.3) werde $x = (\mathfrak{y}|\mathfrak{a})$ gesetzt und über Q integriert. Mit (4.3), (4.5), (4.7) und (4.8) ergibt sich in der Kugel $[|\mathfrak{y}| \leqq r_0]$ die Gleichung

$$(4.9) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(n-1) \int\limits_0^1 (1-\tau)^{n-2} \log f(\tau\,\mathfrak{y})\, d\tau \\ &\qquad = H(\mathfrak{y}) + \frac{1}{W_{2n-2}} \int\limits_{\mathfrak{N}} \nu(\mathfrak{z}) \log E\left(\frac{(\mathfrak{y}|\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}|\mathfrak{z})}, q\right) \partial\omega_{2n-2} . \end{aligned} \right.$$

Es seien r_2 und $\eta > 1$ so gewählt, daß $r_0 < r_2 < r_2\eta < r_1$ gilt. Sind der Vektor $\mathfrak{b}$ in Q, der Vektor $\mathfrak{z}$ in $\mathfrak{N}$ und die Zahl y mit $|y| \leqq r_2$ beliebig gewählt, so werde in Hilfssatz 3 b die Zahl $q = q(|\mathfrak{z}|)$ der Vektor $\mathfrak{y} = y\,\mathfrak{b}$ und $c = \frac{(\mathfrak{b}|\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}|\mathfrak{z})}$ gesetzt. Wegen $|c\,y| \leqq |c|\,r_2 \leqq |c|\,r_2\eta \leqq |\mathfrak{z}|^{-1} r_2\eta \leqq \frac{r_2}{r_1}\eta < 1$ ist

$$(4.10) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\left| \nu(\mathfrak{z}) \frac{1}{\mu!} \frac{d^\mu}{dy^\mu} \left\{ y^{n-1} \log E\left(\frac{(\mathfrak{y}|\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}|\mathfrak{z})}, q\right)\right\}\right| \\ &\qquad \leqq \frac{\eta^n}{(\eta-1)^{\mu+1}} \cdot \frac{r_2^{n-\mu-1}}{1 - r_2\eta r_1^{-1}}\, \nu(\mathfrak{z}) \left(\frac{r_1}{\mathfrak{z}}\right)^{q(|\mathfrak{z}|)+1} . \end{aligned} \right.$$

Da die rechte Seite nicht vom Vektor $\mathfrak{y}$ abhängt und über die Nullstellenfläche $\mathfrak{N}$ integrierbar ist, kann man (4.9) nach Multiplikation mit $\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}$ beliebig oft nach y differenzieren. Wegen

$$(4.11) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(n-1) \int\limits_0^1 (1-\tau)^{n-2} \log f(\tau\,\mathfrak{y})\, d\tau \\ &\qquad = \frac{(n-1)!}{y^{n-1}} \int\limits_0^y \int\limits_0^{x_1} \cdots \int\limits_0^{x_{n-2}} \log f(x_{n-1}\,\mathfrak{b})\, dx_{n-1} \ldots dx_1 \end{aligned} \right.$$

erhält man für $|\mathfrak{y}| \leqq r_0$ nach $(n-1)$-maliger Differentiation

$$(4.12) \qquad \log f(\mathfrak{y}) = G(\mathfrak{y}) + \frac{1}{W_{2n-2}} \int\limits_{\mathfrak{N}} \nu(\mathfrak{z})\, c\left(\frac{(\mathfrak{y}|\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}|\mathfrak{z})}, q\right) \partial\omega_{2n-2},$$

wobei statt $G(\mathfrak{y})$ zunächst zu schreiben ist:

$$(4.13) \qquad G^*(y;\mathfrak{b}) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} \{ y^{n-1} H(y\,\mathfrak{b}) \} .$$

Die Funktion $G^*(y;\mathfrak{b})$ ist in $|y| < \infty$ und $|\mathfrak{b}| < \infty$ analytisch. Für eine komplexe Zahl $\lambda \neq 0$ gilt: $G^*(\lambda\,y;\mathfrak{b}) = G^*(y;\lambda\,\mathfrak{b})$. Die Funktion $G(\mathfrak{y}) = G^*(1;\mathfrak{y})$ ist also ganz in $\mathfrak{y}$. Für $\mathfrak{y} = y\,\mathfrak{b}$ gilt $G(y\,\mathfrak{b}) = G^*(y;\mathfrak{b})$. Nach (4.13) und gemäß der Konstruktion von $f(\mathfrak{y})$ erfüllt die Funktion $h(\mathfrak{y}) = f(\mathfrak{y})\, e^{-G(\mathfrak{y})}$ die Forderungen der zweiten Behauptung, w. z. b. w.

Damit ist die erste Frage von § 1 beantwortet. Wenn insbesondere die ganze, positive, konstante Zahl $q - 1$ ein Konvergenzexponent der Nullstellenfläche $\mathfrak{N}$ ist, wenn also das Integral

(4.14) $$\int_{\mathfrak{N}} \nu(\mathfrak{z})\,|\mathfrak{z}|^{-q-1}\,\partial\omega_{2n-2}$$

existiert, so gibt es eine *ganze* Funktion $h(\mathfrak{y})$, die auf $\mathfrak{N}$ und nur auf $\mathfrak{N}$ verschwindet, und zwar mit der vorgegebenen Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$, und für die

(4.15) $$\log h(\mathfrak{y}) = \frac{1}{W_{2n-2}} \int_{\mathfrak{N}} \nu(\mathfrak{z})\, e\left(\frac{(\mathfrak{y}|\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}|\mathfrak{z})}, q\right) \partial\omega_{2n-2}$$

in der Kugel $[|\mathfrak{y}| \leq r_0]$ genauer in $\mathfrak{N}$ gilt. Die Funktion $h(\mathfrak{y})$ aus (4.15) heiße *kanonisch*.

§ 5. Die Ordnung einer kanonischen Funktion.

Um eine Aussage über die Ordnung einer kanonischen Funktion machen zu können, ist noch eine Abschätzung nötig.

Satz 4. Abschätzung von $\log|h|$.

Voraussetzung. *Es werden dieselben Voraussetzungen wie in Satz 3 gemacht. Die Funktion $q(r) = q$ sei konstant und erfülle die Bedingung 1 b) der Behauptung von Satz 3. Durch (4.2) werde die ganze Funktion $h(\mathfrak{y})$ definiert. Nach Hilfssatz 4 werde die Funktion $K(r) = K(r, n(r, 0))$ gebildet.*

Behauptung. *Für $|\mathfrak{y}| \leq r$, mit beliebigem $r > 0$, gilt die Abschätzung:*

(5.1) $$\log|h(\mathfrak{y})| \leq 8^{3n}\,[K(4r) + n(4r, 0) + N(4r, 0)].$$

Der Beweis beginnt wie derjenige von Satz 3. Für fast alle Vektoren $\mathfrak{a} \in Q$ gilt für h statt f jetzt

(5.2) $$\log h(x\,\mathfrak{a}) = g(x; \mathfrak{a}) + \sum_{|z|<\infty} \nu(z, 0; \mathfrak{a}) \log E\left(\frac{x}{z}, q\right),$$

wobei wieder $g(x; \mathfrak{a})$ in x ganz ist. Ebenfalls existiert das Integral

$$\frac{1}{W_{2n-2}} \int_{\mathfrak{a} \in Q} g\left((\mathfrak{y}|\mathfrak{a}); \mathfrak{a}\right) \partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{a}) = H(\mathfrak{y})$$

und ist eine ganze Funktion. Für $|y| \leq r_0$ und $\mathfrak{b} \in Q$ gilt nach (4.9) und (4.11) die Gleichung

(5.3) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{(n-1)!}{y^{n-1}} \int_0^y \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_{n-2}} \log h(x_{n-1}\,\mathfrak{b})\, d x_{n-1} \cdots d x_1 \\ &\qquad = H(\mathfrak{y}) + \frac{1}{W_{2n-2}} \int_{\mathfrak{N}} \nu(\mathfrak{z}) \log E\left(\frac{(\mathfrak{y}|\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}|\mathfrak{z})}, q\right) \partial\omega_{2n-2}. \end{aligned}\right.$$

In (4.2) werde $\mathfrak{y} = y\,\mathfrak{b}$ gesetzt und $(n-1)$-mal nach y integriert. Wegen (4.10) kann man rechts die Integrationsreihenfolge vertauschen. Nach (1.8),

(4.2) und Hilfssatz 3c gilt:

$$(5.4)\qquad \begin{cases} \dfrac{(n-1)!}{y^{n-1}} \displaystyle\int_0^y \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_{n-2}} \log h(x_{n-1}\mathfrak{b})\, dx_{n-1} \ldots dx_1 \\ \qquad = \dfrac{1}{W_{2n-2}} \displaystyle\int_{\mathfrak{R}} v(\mathfrak{z}) \log E\left(\frac{(\mathfrak{y}|\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}|\mathfrak{z})}, q\right) \partial\omega_{2n-2}. \end{cases}$$

Der Vergleich von (5.3) und (5.4) lehrt, daß $H(\mathfrak{y})$ in der Kugel $|\mathfrak{y}| \leqq r_0$, also auch für alle $\mathfrak{y}$ identisch verschwindet.

Hilfssatz 5 liefert die Abschätzung

$$(5.5)\qquad \log|h(x\mathfrak{a})| \leqq \Re\mathfrak{e}\, g(x;\mathfrak{a}) + K\big(r; n(r,0;\mathfrak{a})\big) \quad \text{für} \quad |x| \leqq r.$$

In (5.5) werde $x = (\mathfrak{y}|\mathfrak{a})$ gesetzt und über Q integriert. Wegen

$$n(r,0) = \frac{1}{W_{2n-2}} \int_Q n(r,0;\mathfrak{a})\, \partial\omega_{2n-2}$$

erhält man

$$(5.6)\qquad \frac{1}{W_{2n-2}} \int_{\mathfrak{a}\in Q} \log|h((\mathfrak{y}|\mathfrak{a})\mathfrak{a})|\, \partial\omega_{2n-2} \leqq \Re\mathfrak{e}\, H(\mathfrak{y}) + K\big(r; n(r,0)\big) = 0 + K(r).$$

Mit Hilfssatz 6 gewinnt man die Abschätzung

$$(5.7)\qquad (n-1) \int_0^1 (1-\tau)^{n-2} \log|h(\tau\mathfrak{y})|\, d\tau \leqq K(r)$$

für $|\mathfrak{y}| \leqq r$ und alle $r > 0$. Wegen $h(0) = 1$ folgt aus (5.7) und Hilfssatz 7 die Behauptung, w. z. b. w.

Satz 5. Zusammenfassung.

Voraussetzung. *Die in $\mathfrak{R}^{2n}$ abgeschlossene Nullstellenfläche $\mathfrak{N}$ habe die Vielfachheit $v(\mathfrak{z})$ und den Grenzexponenten $\varrho < \infty$. Die Zahl $q+1$ sei der kleinste ganze positive Konvergenzexponent. Für einen Radius $r_0 > 0$ sei $\mathfrak{N}_{0r_0}$ leer.*

Behauptung.

1. *Es gibt eine ganze Funktion $h(\mathfrak{y})$, die durch die beiden folgenden Forderungen* a) *und* b) *eindeutig bestimmt ist:*

a) *Die ganze Funktion $h(\mathfrak{y})$ verschwindet auf der Nullstellenfläche $\mathfrak{N}$ und nur auf ihr, und zwar mit der Vielfachheit $v(\mathfrak{z})$.*

b) *In der Kugel $[|\mathfrak{y}| \leqq r_0]$ (genauer in $\mathfrak{R}$) gilt:*

$$(5.8)\qquad \log h(\mathfrak{y}) = \frac{1}{W_{2n-2}} \int_{\mathfrak{N}} v(\mathfrak{z})\, e\left(\frac{(\mathfrak{y}|\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}|\mathfrak{z})}, q\right) \partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{z})\ ^{9}).$$

2. *Ist $v(z,0;\mathfrak{a})$ die Vielfachheit der Nullstelle z der Funktion $h(z\mathfrak{a})$, so gilt:*

$$(5.9)\qquad h(y\mathfrak{a}) = \lim_{r\to\infty} \prod_{|z|\leqq r} E\left(\frac{y}{z}, q\right)^{v(z,0;\mathfrak{a})}\ ^{10})$$

[10]) Daraus folgt, daß für die Funktion $g(x;\mathfrak{a})$ aus (4.3) und $G(\mathfrak{y})$ aus (4.12) die Gleichung $g(1;\mathfrak{y}) = G(\mathfrak{y})$ besteht.

für alle y und alle $\mathfrak{a} \neq 0$. Ist der Grenzexponent $\varrho < q+1$, so konvergiert das Produkt absolut. Man darf $\lim_{r\to\infty} \prod_{|z_\nu|\leq r} = \prod_{|z_\nu|<\infty}$ *schreiben.*

3. a) Ord h $= \operatorname{Ord} n(r,0) = \varrho =$ *Grenzexponent*,
   b) Typ h $= \operatorname{Typ} n(r,0)$, *falls* $q < \varrho \leqq q+1$ *ist*,
   c) Klasse $h = \operatorname{Klasse} n(r,0)$, *falls* $q < \varrho < q+1$ *ist*.

Beweis. Die 1. Behauptung wurde schon in Satz 3 bewiesen. Nach dem 1. Hauptsatz ist $T(e\,r) \geqq N(e\,r,0) \quad m(r_0,0) \geqq n(r,0) \quad m(r_0,0)$. Also gilt Ord, Typ, Klasse $h \geqq$ Ord, Typ, Klasse $n(r,0)$. Nach Satz 4 ist $\log M(r) \leqq 8^{3n}\{K(4r) + n(4r,0) - N(4r,0)\}$. Nach Hilfssatz 4, Satz 1 und Satz 2 wird also

$$\begin{aligned}\operatorname{Ord} T(r) = \operatorname{Ord} \log M(r) &\leqq \operatorname{Max}\{\operatorname{Ord} K, \operatorname{Ord} n(r,0), \operatorname{Ord} N(r,0)\}\\ &= \operatorname{Ord} n(r,0) = \varrho\,.\end{aligned}$$

Falls $q < \varrho \leqq q+1$ ist, ergeben dieselben Sätze

$$\begin{aligned}\operatorname{Typ} T(r) = \operatorname{Typ} \log M(r) &\leqq \operatorname{Max}\{\operatorname{Typ} K, \operatorname{Typ} n(r,0), \operatorname{Typ} N(r,0)\}\\ &= \operatorname{Typ} n(r,0)\,.\end{aligned}$$

Falls $q < \varrho < q+1$ ist, erhält man dasselbe für die Klasse. Damit ist auch die dritte Behauptung bewiesen.

Für $|\mathfrak{a}| = 1$ werde $M(r;\mathfrak{a}) = \operatorname{Max}_{|y|\leq r} |h(y\,\mathfrak{a})|$ gesetzt. Dann ist

$$\begin{aligned}\operatorname{Ord, Typ, Klasse}\, h(y\,\mathfrak{a}) &= \operatorname{Ord, Typ, Klasse} \log M(r;\mathfrak{a})\\ &\leqq \operatorname{Ord, Typ, Klasse} \log M(r)\,.\end{aligned}$$

Da die Zahl $q+1$ ein Konvergenzexponent ist, existiert das Integral $\int_{r_0}^{\infty} n(r,0)\, r^{-q-2}\, dr$. Wenn $\varrho = q+1$ ist, so gehört $n(r,0)$, also auch $\log M(r)$ zum Minimaltyp. Wenn auch noch die Charakteristik $T(r;\mathfrak{a})$ von $h(y\,\mathfrak{a})$ die Ordnung $q+1$ hat, so gehört auch $\log M(r;\mathfrak{a})$ zum Minimaltyp. Dasselbe gilt von $T(r;\mathfrak{a})$. Es strebt $T(r;\mathfrak{a})\, r^{-q-1} \to 0$ für $r \to \infty$. Daraus folgt (5.9). Ist die Ordnung von $T(r;\mathfrak{a})$ kleiner als $q+1$, so existiert das Integral $\int_{r_0}^{\infty} T(r;\mathfrak{a})\, r^{-q-2}\, dr$. Daraus folgt (5.9) mit $\lim_{r\to\infty} \prod_{|z|\leq r} = \prod_{|z|<\infty}$. Wenn $\varrho < q+1$ ist, so hat $\log M(r)$, also $\log M(r;\mathfrak{a})$, also $T(r;\mathfrak{a})$ eine Ordnung kleiner als $q+1$. Daraus folgt wieder (5.9) mit $\lim_{r\to\infty} \prod_{|z|\leq r} = \prod_{|z|<\infty}$, w. z. b. w.

Wie bei einer Veränderlichen kann man nun Aussagen über das Geschlecht und die Ordnung meromorpher Funktionen machen. Diese Sätze lassen sich jedoch leicht auch für meromorphe Vektorfunktionen, sog. „meromorphe Flächen", aussprechen, was jetzt geschehen soll. Zunächst müssen diese meromorphen Flächen noch definiert werden.

Der Vektor $\mathfrak{w} = (w_1, \ldots, w_m)$ gehöre zum projektiven Raum $\mathfrak{P}^{2m-2}$. Der Vektor $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ gehöre dem *dualen Raum*[11]) $^*\mathfrak{P}^{2m-2}$ an. Die Koordinatensysteme der beiden Räume seien so gekoppelt, daß das *innere Produkt*[11])

$$(\mathfrak{w}, \vec{\alpha}) = \sum_{\mu=1}^{m} w_\mu \alpha_\mu \tag{5.10}$$

invariant gegenüber Koordinatentransformationen ist. Das *skalare Produkt*[11]) wird durch eine positiv definite HERMITEsche Form $\sum_{\mu,\nu=1}^{m} g_{\mu\nu} w_\mu \overline{w}_\nu$ erklärt:

$$(\mathfrak{w}|\mathfrak{v}) = \sum_{\mu,\nu=1}^{m} g_{\mu\nu} w_\mu \overline{v}_\nu \quad \text{mit} \quad |\mathfrak{w}| = \sqrt{(\mathfrak{w}|\mathfrak{w})}. \tag{5.11}$$

Der Abstand von $\mathfrak{w}$ zur Ebene $\vec{\alpha}$[11]) sei

$$||\mathfrak{w}, \vec{\alpha}|| = \frac{|(\mathfrak{w}, \vec{\alpha})|}{|\mathfrak{w}|\,|\vec{\alpha}|}. \tag{5.12}$$

Eine meromorphe Fläche ist eine meromorphe Abbildung $\mathfrak{W}(P)$ einer komplexen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ in den projektiven Raum $\mathfrak{P}^{2m-2}$. Eine Darstellung

$$\mathfrak{w}(P) = \big(w_1(P), \ldots, w_m(P)\big) = \sum_{\mu=1}^{m} w_\mu(P)\, \mathfrak{e}_\mu$$

braucht nur auf einer offenen Teilmenge $U \subseteqq \mathfrak{M}^{2n}$ erklärt zu sein. Im Durchschnitt der Gültigkeitsbereiche U_1, U_2 zweier Darstellungen $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2$ sei eine meromorphe Funktion $\lambda(P) \not\equiv 0$ erklärt, für die $\mathfrak{w}_1(P) = \lambda(P)\, \mathfrak{w}_2(P)$ in $U_1 \cap U_2$ gilt. Zu jedem Punkt $P \in \mathfrak{M}^{2n}$ gebe es eine offene Umgebung U und eine Darstellung $\mathfrak{w}$ auf U. Eine Darstellung heiße *meromorph*, bzw. *analytisch*, wenn es die Koordinatenfunktionen $w_\mu(P)$ sind. Sie heiße *reduziert im Punkt* P, wenn die $w_\mu(P)$ in P analytisch sind, und den größten gemeinsamen Teiler 1 haben; sie heiße *in* U *reduziert*, wenn sie in jedem Punkt von U reduziert ist. Ist $U = \mathfrak{M}^{2n}$, so heiße die Darstellung *einheitlich*. Meromorphe, einheitliche Darstellungen gibt es immer, aber nicht immer analytische oder gar reduzierte. Ist $\mathfrak{M}^{2n}$ ein COUSINsches Gebiet zweiter Art, so gibt es immer einheitliche analytische und reduzierte Darstellungen.

Eine meromorphe Funktion f ist ein Spezialfall der meromorphen Flächen, nämlich die Fläche: $\mathfrak{w} = (1, f)$.

Bei Flächen übernimmt die Rolle der a-Stelle die *Schnittstelle mit der Ebene* $\vec{\alpha}$, deren Vielfachheit $\nu(P, \vec{\alpha})$ die Vielfachheit der Nullstelle P von $\big(\mathfrak{w}(P), \vec{\alpha}\big)$ bei reduzierter Darstellung $\mathfrak{w}(P)$ ist. Die Nullstellenfläche $\mathfrak{N}(\vec{\alpha}) = [\nu(P, \vec{\alpha}) > 0]$ heiße die Schnittstellenfläche zur Ebene $\vec{\alpha}$. Dabei werde $\big(\mathfrak{w}(P), \vec{\alpha}\big) \not\equiv 0$ für jeden Vektor $\vec{\alpha} \neq 0$ vorausgesetzt. Jetzt sei als Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ der $\mathfrak{z}$-Raum $\mathfrak{R}^{2n}$ gewählt.

[11]) Das sind dieselben Bezeichnungen wie bei WEYL [8] Kap. I A. Im übrigen ist $^*\mathfrak{P}^{2m-2}$ lediglich ein zweites Exemplar von $\mathfrak{P}^{2m-2}$.

Für meromorphe Flächen kann man auch einen *„ersten Hauptsatz"* beweisen. Wegen Satz 10 aus I kann man die *Anzahlfunktion* $n(r, \vec{\alpha})$ durch

$$(5.13)\quad \begin{cases} n(r,\vec{\alpha}) = \dfrac{1}{V_{2n-2}(r)} \displaystyle\int_{r_0 \mathfrak{N}(\vec{\alpha})}^{r} \nu(\mathfrak{z},\vec{\alpha})\, \partial v_{2n-2}(\mathfrak{z}) \\ \qquad = \dfrac{1}{W_{2n-2}} \displaystyle\int_{r_0 \mathfrak{N}(\vec{\alpha})}^{r} \nu(\mathfrak{z},\alpha)\, \partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{z}) + \nu(0,\vec{\alpha}) \end{cases}$$

definieren. Die *Valenz* (*große Anzahlfunktion*) ist

$$(5.14)\quad N(r,\vec{\alpha}) = \int_{r_0}^{r} \frac{n(t,\vec{\alpha})}{t}\, dt.$$

Die *Schmiegungsfunktion* ist

$$(5.15)\quad m(r,\vec{\alpha}) = \frac{1}{V_{2n-1}(r)} \cdot \int_{|\mathfrak{z}|=r} \log \frac{1}{\|\mathfrak{w},\vec{\alpha}\|}\, \partial v_{2n-1}.$$

Die *Charakteristik* werde durch

$$(5.16)\quad T(r) = N(r,\vec{\alpha}) + m(r,\vec{\alpha}) - m(r_0,\vec{\alpha})$$

definiert. Der *erste Hauptsatz*[12]) besagt, daß sie nicht von der Wahl des dualen Vektors $\vec{\alpha}$ abhängt. Für die *Charakteristik* kann man noch verschiedene *Darstellungen*[12]) geben, z. B.:

$$(5.17)\quad T(r) \leqq \frac{1}{V_{2n-1}(r)} \int_{|\mathfrak{z}|=r} \log |\mathfrak{w}(\mathfrak{z})|\, \partial v_{2n-1} - \frac{1}{V_{2n-1}(r_0)} \int_{|\mathfrak{z}|=r_0} \log |\mathfrak{w}(\mathfrak{z})|\, \partial v_{2n-1},$$

wobei $\mathfrak{w}(\mathfrak{z})$ eine einheitliche analytische Darstellung ist. Wenn $\mathfrak{w}(\mathfrak{z})$ sogar reduziert ist, so gilt in (5.17) das Gleichheitszeichen für alle r. Setzt man

$$(5.18)\quad \nu = \frac{1}{V_{2m-1}(1)} \int_{|\vec{\alpha}|=1} \nu(0,\vec{\alpha})\, \partial v_{2m-1}(\vec{\alpha}),$$

so ist[12])

$$(5.19)\quad \begin{cases} A(t) = \dfrac{1}{W_2 W_{2n-2}} \displaystyle\int_{|\mathfrak{z}|\leqq t} \partial\omega_2(\mathfrak{w})\, \partial\omega_{2n-2}(\mathfrak{z}) + \nu \\ \qquad = \dfrac{1}{W_2 V_{2n-2}(t)} \displaystyle\int_{|\mathfrak{z}|\leqq t} \partial\omega_2(\mathfrak{w})\, \partial v_{2n-2}(\mathfrak{z}). \end{cases}$$

Dann besitzt die Charakteristik $T(r)$ die Darstellung[12])

$$(5.20)\quad T(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{A(t)}{t}\, dt.$$

[12]) Der Beweis wird in einer späteren Arbeit geführt werden. Er ergibt sich leicht, wenn man nach der Methode von H. Kneser [3] die Sätze von Weyl [8] auf mehrere Veränderliche überträgt.

Der Beweis dieser Sätze (5.16) bis (5.20) würde hier zu weit führen. Er wird unabhängig von den folgenden Sätzen in einer späteren Arbeit erbracht werden. Die folgenden Aussagen sollen dagegen hier bewiesen werden, was analog dem Fall $n=1$ geschehen kann.

Die Charakteristik ist unabhängig von der Wahl der Koordinatensystems $c_1, \ldots, c_m$. Also kann man immer ein normales Koordinatensystem wählen: $|\mathfrak{w}|^2 = \sum_{\mu=1}^{m} |w_\mu|^2$. Der Funktion f entspricht die Fläche $(1, f)$, der Funktion f^{-1} die Fläche $(f, 1)$. Also haben f und f^{-1} dieselbe Charakteristik $T(r, f)$. Wenn in den Quotientendarstellungen $f = f_1/f_2$, $g = g_1/g_2$ die ganzen Funktionen f_1, f_2 bzw. g_1, g_2 teilerfremd sind, so schätzt man mittels (5.17) ab:

$$(5.21)\quad \begin{cases} T(r, f\cdot g) \leqq \dfrac{1}{V_{2n-1}(r)} \displaystyle\int_{|\mathfrak{z}|=r} \frac{1}{2} \log\left(|f_1 g_1|^2 + |f_2 g_2|^2\right) \partial v_{2n-1} + c_1\,{}^{13}) \\ \leqq \dfrac{1}{V_{2n-1}(r)} \displaystyle\int_{|\mathfrak{z}|=r} \left\{\frac{1}{2} \log\left(|f_1|^2 + |f_2|^2\right) + \frac{1}{2} \log\left(|g_1|^2 + |g_2|^2\right)\right\} \partial v_{2n-1} + c_1 \\ \leqq T(r, f) + T(r, g) + c_2. \end{cases}$$

Ist $\mathfrak{w}(\mathfrak{z})$ eine einheitliche reduzierte Darstellung der meromorphen Fläche $\mathfrak{W}(\mathfrak{z})$, und wird $f_{\vec{\alpha}} = (\mathfrak{w}(\mathfrak{z}), \vec{\alpha})$ gesetzt, so gilt für zwei Vektoren $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ vom Betrag 1

$$(5.22)\quad \begin{cases} T(r) + c_3 = \dfrac{1}{V_{2n-1}(r)} \displaystyle\int_{|\mathfrak{z}|=r} \log|\mathfrak{w}|\, \partial v_{2n-1} \\ \geqq \dfrac{1}{V_{2n-1}(r)} \displaystyle\int_{|\mathfrak{z}|=r} \frac{1}{2} \log\left\{|(\mathfrak{w}, \vec{\alpha})|^2 + |(\mathfrak{w}, \vec{\beta})|^2\right\} \partial v_{2n-1} - \frac{1}{2} \log 2 \\ \geqq T\left(r, \dfrac{f_{\vec{\alpha}}}{f_{\vec{\beta}}}\right) + c_4. \end{cases}$$

Mit der Abschätzung (5.22), dem in (1.9) und (1.10) erwähnten Satz von H. KNESER [3] (falls im folgenden Satz 6 die Voraussetzung a) gemacht wird) bzw. mit Satz 3 (falls b) vorausgesetzt wird) ergibt sich unmittelbar:

Satz 6. Kanonische Darstellung einer meromorphen Fläche.

Voraussetzung. *Die meromorphe Fläche $\mathfrak{W}(\mathfrak{z})$ habe die Charakteristik $T(r)$. Es werde $f(\mathfrak{z}) = f(\mathfrak{z}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \dfrac{(\mathfrak{W}(\mathfrak{z}), \vec{\alpha})}{(\mathfrak{W}(\mathfrak{z}), \vec{\beta})}$ gesetzt, und $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(\vec{\alpha}) \cup \mathfrak{N}(\vec{\beta})$ sowie $\nu(\mathfrak{z}) = \nu(\mathfrak{z}, \vec{\alpha}) - \nu(\mathfrak{z}, \vec{\beta})$ abgekürzt. Es sei $\mathfrak{N}_{0r_0}$ leer. Weiter gelte mit einer ganzen Zahl q entweder*

a) $T(r)\cdot r^{-q-1} \to 0$ für $r \to \infty$, *oder*

b) $q+1$ *ist Konvergenzexponent von* $\mathfrak{N}(\vec{\alpha})$ *und* $\mathfrak{N}(\vec{\beta})$.

[13]) Die Größen $c_1, c_2, c_3, \ldots$ bedeuten Konstanten.

Behauptung. *Wird nur* b) *vorausgesetzt, so gilt in* $|\mathfrak{y}| \leqq r_0$

$$\log f(\mathfrak{y}, \alpha, \vec{\beta}) = g(\mathfrak{y}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}) + \int_{\mathfrak{N}} \nu(\mathfrak{z})\, e\left(\frac{(\mathfrak{y}|\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}|\mathfrak{z})}, q\right) \partial\omega_{2n-2} \tag{5.23}$$

mit ganzem $g(\mathfrak{y}, \vec{\alpha}, \vec{\beta})$. *Wird nur* a) *vorausgesetzt, so gilt* (5.23) *mit* $\lim_{r\to\infty} \int_{0\mathfrak{N}}^{r}$ *statt* $\int_{\mathfrak{N}}$; *die Funktion* g *ist ein Polynom höchstens* q*-ten Grades.*

Ganz ähnlich lautet

Satz 7. Die Exponentialfaktoren.

Voraussetzung. *Die meromorphe Fläche* $\mathfrak{W}(\mathfrak{z})$ *habe die einheitliche reduzierte Darstellung* $\mathfrak{w}(\mathfrak{z})$. *Die Vektoren* $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_m$ *seien linear unabhängig. Die Schnittstellenfläche* $\mathfrak{N}(\vec{\alpha}_\nu)$ *zu* $\vec{\alpha}_\nu$ *habe den kleinsten positiven ganzzahligen Konvergenzexponenten* $q_\nu + 1$. *Für ein* $r_0 > 0$ *seien* $\mathfrak{N}_{0r_0}(\vec{\alpha}_\nu)$ *leer. Die ganze Zahl* σ *sei in* $\max_{\nu=1,\ldots,m} (\mathrm{Ord}\, T(r), q_\nu) < \sigma + 1 < \infty$ *beliebig gewählt.*

Behauptung. *Für* $|\mathfrak{y}| \leqq r_0$ *gilt*

$$\log(\mathfrak{w}(\mathfrak{y}), \vec{\alpha}_\nu) = g(\mathfrak{y}, \vec{\alpha}_\nu) + \frac{1}{W_{2n-2}} \int_{\mathfrak{N}(\vec{\alpha}_\nu)} \nu(\mathfrak{z}, \vec{\alpha}_\nu)\, e\left(\frac{(\mathfrak{y}|\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}|\mathfrak{z})}, q_\nu\right) \partial\omega_{2n-2} \tag{5.24}$$

mit ganzen Funktionen $g(\mathfrak{y}, \vec{\alpha}_\nu)$, *deren Differenzen* $G_{\mu\nu} = g(\mathfrak{y}, \vec{\alpha}_\nu) - g(\mathfrak{y}, \vec{\alpha}_\mu)$ *Polynome mit einem Grad* $h_{\mu\nu} \leqq \sigma$ *sind.*

Beweis. Aus Satz 3 folgt die Darstellung (5.24). O. B. d. A. sei $|\vec{\alpha}_\nu| = 1$. Setzt man $(\mathfrak{w}(\mathfrak{y}), \vec{\alpha}_\nu)\, e^{-g(\mathfrak{y}, \vec{\alpha}_\nu)} = \pi_\nu(\mathfrak{y})$, so ist nach (5.21) und (5.22)

$$\begin{aligned} T(r, e^{G_{\mu\nu}}) &\leqq T\left(r, \frac{(\mathfrak{w}, \vec{\alpha}_\mu)}{(\mathfrak{w}, \vec{\alpha}_\nu)}\right) + T(r, \pi_\mu) + T(r, \pi_\nu) + c_5 \\ &\leqq T(r) + T(r, \pi_\mu) + T(r, \pi_\nu) + c_6. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Da $\mathrm{Ord}\, T(r) < \sigma + 1$ und nach Satz 5 $\mathrm{Ord}\, T(r, \pi_\nu) \leqq q_\nu + 1 \leqq \sigma + 1$ bzw., falls $\mathrm{Ord}\, T(r, \pi_\nu) = q_\nu + 1$ ist, $\mathrm{Typ}\, T(r, \pi_\nu) = \mathrm{Typ}\, n(r, 0, \pi_\nu)$ der Minimaltyp ist, folgt

$$\frac{T(r, e^{G_{\mu\nu}})}{r^{\sigma+1}} \leqq \frac{c_6}{r^{\sigma+1}} + \frac{T(r)}{r^{\sigma+1}} + \frac{T(r, \pi_\mu)}{r^{\sigma+1}} + \frac{T(r, \pi_\nu)}{r^{\sigma+1}} \to 0 \quad \text{für } r \to \infty. \tag{5.26}$$

Nach Satz 6 ist $G_{\mu\nu} = \log e^{G_{\mu\nu}}$ ein Polynom höchstens σ-ten Grades, w. z. b. w.

Die Zahl $q = \max_{\mu,\nu,\varrho=1,\ldots,m} (h_{\mu\nu}, q_\varrho)$ heiße das Geschlecht von $\mathfrak{W}(\mathfrak{z})$ bezüglich des Koordinatensystemes $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_m$. Es ist von der Wahl der einheitlichen reduzierten Darstellung $\mathfrak{w}(\mathfrak{z})$ unabhängig.

Satz 8. Geschlecht und Ordnung.

Voraussetzung. *Wie Satz 7. Die Ordnung* λ von $\mathfrak{W}(\mathfrak{z})$ *sei positiv.* q *sei das Geschlecht bezüglich des Koordinatensystemes* $\vec{\alpha}_1, \ldots, \alpha_m$.

Behauptung.

1. $q \leqq \mathrm{Ord}\, T(r) = \lambda \leqq q + 1$.

2. *Ist* λ *nicht ganzzahlig, so besitzt jedes Koordinatensystem* $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_m$ *dasselbe Geschlecht* q. *Alle Funktionen* $N(r, \vec{\alpha})$ (bzw. $n(r, \vec{\alpha})$) *haben dieselbe*

Ordnung λ wie $\mathfrak{W}(\mathfrak{z})$ mit Ausnahme höchstens einer Menge von dualen Vektoren $\vec{\alpha}$, die nicht mehr als $(m-1)$ linear unabhängige Vektoren enthält, die also einen höchstens $(2m-2)$-dimensionalen, linearen Unterraum bilden. Entsprechendes gilt für Klasse und Typ.

3. a) *Dann und nur dann ist $q=\lambda$, wenn eine der Aussagen gilt*

α) *$T(r)$ ist nicht vom Minimaltyp.*

β) *$T(r)$ ist vom Minimaltyp, in der Divergenzklasse und λ Divergenzexponent für wenigstens ein $\mathfrak{N}(\vec{\alpha}_\nu)$.*

b) *Dann und nur dann ist $q+1=\lambda$, wenn eine der Aussagen gilt*

γ) *$T(r)$ ist vom Minimaltyp, in der Divergenzklasse und λ Konvergenzexponent für alle $\mathfrak{N}(\vec{\alpha}_\nu)$.*

δ) *$T(r)$ ist in der Konvergenzklasse.*

Diese Aussagen sind wörtlich dieselben wie bei einer Veränderlichen.

Beweis. 1. Setzt man $f_\nu(\mathfrak{z})=(\mathfrak{w}(\mathfrak{z}),\vec{\alpha}_\nu)=\sum_{\mu=1}^{m}\alpha_{\nu\mu}w_\mu$, so kann man eindeutig auflösen: $w_\mu(\mathfrak{z})=\sum_{\nu=1}^{m}\beta_{\mu\nu}f_\nu(\mathfrak{z})$. Folglich gilt

$$|\mathfrak{w}(\mathfrak{z})|^2=\sum_{\mu,\nu=1}^{m}g_{\mu\nu}w_\mu\overline{w}_\nu\leq c_7\sum_{\mu=1}^{m}|w_\mu|^2\leq c_8\sum_{\mu=1}^{m}|f_\mu(\mathfrak{z})|^2.$$

Die Konstanten c_7 und c_8 hängen nur von $g_{\mu\nu}$ und $\vec{\alpha}_\nu$ ab. Mit den Bezeichnungen der Sätze 6 und 7 gilt

$$T(r)=\frac{1}{\mathfrak{v}_{2n-1}(r)}\int_{|\mathfrak{z}|=r}\log|e^{-g(\mathfrak{z},\vec{\alpha}_\nu)}\mathfrak{w}(\mathfrak{z})|\,\partial v_{2n-1}+c_9$$

$$\leq\frac{1}{\mathfrak{v}_{2n-1}(r)}\int_{|\mathfrak{z}|=r}\frac{1}{2}\log\sum_{\mu=1}^{m}|e^{-g(\mathfrak{z},\vec{\alpha}_\nu)}f_\mu|^2\,\partial v_{2n-1}+c_{10}$$

$$\leq\frac{1}{\mathfrak{v}_{2n-1}(r)}\int_{|\mathfrak{z}|=r}\left\{\frac{1}{2}\log\sum_{\mu=1}^{m}|e^{G_{\nu\mu}}|^2+\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{m}\log(1+|\tau_\mu|^2)\right\}\partial v_{2n-1}+c_{11},$$

$$T(r)\leq c_{12}r^q+\sum_{\mu=1}^{m}T(r,\tau_\mu)+c_{13}. \tag{5.27}$$

Da die Ordnung von $T(r,\tau_\mu)$ gleich dem Grenzexponenten von $\mathfrak{N}(\alpha_\mu)$ also höchstens gleich $q_\mu+1$ ist, folgt $\lambda=\operatorname{Ord}T(r)\leq q+1$. Ist $\lambda<q+1$, so existiert $\int_{r_0}^{\infty}T(r)\,r^{-\lambda-\varepsilon-1}\,dr$, also $\int_{r_0}^{\infty}N(r,\vec{\alpha}_\nu)\,r^{-\lambda-\varepsilon-1}\,dr$ für alle ν und jedes $\varepsilon>0$, d.h. $\lambda+\varepsilon$ ist Konvergenzexponent aller $\mathfrak{N}(\vec{\alpha}_\nu)$. Man erhält $q_\nu\leq\lambda+\varepsilon$ d.h. $q_\nu\leq[\lambda]=\sigma$. Deswegen und wegen $\lambda<\sigma+1$ folgt aus Satz 7 $h_{\mu\nu}\leq\sigma$. Insgesamt ergibt sich $q\leq\sigma=[\lambda]\leq\lambda$.

2. Aus Satz 2, dem ersten Hauptsatz, Satz 5 und (5.27) folgt für $q<\lambda<q+1$

$$\operatorname{Ord}n(r,\vec{\alpha}_\nu)=\operatorname{Ord}N(r,\vec{\alpha}_\nu)\leq\operatorname{Ord}T(r)=\operatorname{Ord}\left(T(r)-c_{12}r^q\right)$$

$$\leq\max_{\nu=1,\ldots,m}\operatorname{Ord}T(r,\tau_\nu)\leq\max_{\nu=1,\ldots,m}\operatorname{Ord}N(r,\vec{\alpha}_\nu)=\max_{\nu=1,\ldots,m}\operatorname{Ord}n(r,\vec{\alpha}_\nu).$$

Für wenigstens ein ν gilt die Gleichheit. Da die $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_m$ beliebig gewählt sind, gibt es unter den Vektoren $\vec{\alpha}$ mit $\operatorname{Ord} n(r, \vec{\alpha}) = \operatorname{Ord} N(r, \vec{\alpha}) < \operatorname{Ord} T(r)$ höchstens $m-1$ linear unabhängige. Entsprechend schließt man für Klasse und Typ.

3. α) Ein ganzzahliges λ hat den Wert q oder $q+1$. Da $q+1$ Konvergenzexponent aller $\mathfrak{N}(\vec{\alpha}_\nu)$ ist, streben alle $\frac{n(r, \vec{\alpha}_\nu)}{r^{q+1}} \to 0$ also nach Satz 5 auch alle $\frac{T(r, \pi_\nu)}{r^{q+1}} \to 0$ für $r \to \infty$. Nach (5.27) gehört dann $T(r)$ im Falle $\lambda = q+1$ zum Minimaltyp. α) ist bewiesen.

β) Es ist $\lambda \geqq q \geqq q_\nu$. Ist λ Divergenzexponent eines $\mathfrak{N}(\vec{\alpha}_\nu)$, so gilt $\lambda = q_\nu$. β) ist bewiesen.

γ) Ist λ Konvergenzexponent aller $\mathfrak{N}(\vec{\alpha}_\nu)$, so strebt $n(r, \vec{\alpha}_\nu)\, r^{-\lambda} \to 0$, also nach Satz 5 auch $T(r, \pi_\nu)\, r^{-\lambda} \to 0$ für $r \to \infty$. Ist $T(r)$ noch vom Minimaltyp, so gilt nach (5.25)

$$\frac{T(r, e^{G_{\mu\nu}})}{r^\lambda} \leqq \frac{T(r)}{r^\lambda} + \frac{T(r, \pi_\nu)}{r^\lambda} + \frac{T(r, \pi_\mu)}{r^\lambda} + \frac{c_6}{r^\lambda} \to 0 \quad \text{für} \quad r \to \infty.$$

Daher ist $h_{\mu\nu} \leqq \lambda - 1$. Für den Konvergenzexponenten λ gilt aber auch $q_\nu \leqq \lambda - 1$. Insgesamt folgt $q = \operatorname{Max}(h_{\mu\nu}, q_\nu) \leqq \lambda - 1 \leqq q$. γ) ist bewiesen.

δ) Liegt $T(r)$ in der Konvergenzklasse, so ist $T(r)$ vom Minimaltyp und λ ist nach dem ersten Hauptsatz und Satz 2 Konvergenzexponent aller $\mathfrak{N}(\vec{\alpha}_\nu)$. δ) ist bewiesen, w. z. b. w.

Literatur.

[1] Ahlfors, L.: The theory of meromorphic curves. Acta Soc. Sci. Fennicae nova, Ser. A **3**, 31 (1941). — [2] Kneser, H.: Ordnung und Nullstellen bei ganzen Funktionen zweier Veränderlicher. Sonderausgabe a. d. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., physik.-math. Kl. **31**, 19 (1936). — [3] Kneser, H.: Zur Theorie der gebrochenen Funktionen mehrerer Veränderlicher. Jber. dtsch. Math.-Ver. **48**, 1—28 (1938). — [4] Landau, E.: Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. Berlin 1916. — [5] Nevanlinna, R.: Eindeutige analytische Funktionen. 1936. — [6] Weyl, H., and J. Weyl: Meromorphic curves. Ann. of Math. (2) **39**, 516—538 (1938). — [7] Weyl, J.: Analytic curves. Ann. of Math. (2) **42**, 371—408 (1941). — [8] Weyl, H., and J. Weyl: Meromorphic functions and analytic curves. Princeton university press 1943. (Annals of mathematics studies.)

Tübingen, Ebertstr. 8.

(Eingegangen am 9. Juni 1952.)

KNESER, M.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 238—240 (1953)

Bemerkung über die Primpolynomzerlegung in endlich vielen Schritten.

Von

MARTIN KNESER.

Über die Möglichkeit, ein vorgegebenes Polynom in endlich vielen Schritten in Primfaktoren zu zerlegen, ist seit KRONECKER[1]) folgendes bekannt. Es gibt ein Verfahren, um jedes Polynom $f(t)$ aus dem Polynomring $K[t]$ in Primfaktoren zu zerlegen, falls der Grundkörper K eine der folgenden Eigenschaften besitzt:

(1) K ist Primkörper, oder

(2) $K = k(a)$, in k gibt es ein solches Verfahren und

a) a ist transzendent über k, oder

b) a ist Nullstelle eines gegebenen separablen Polynoms $f(t) \in k[t]$.

Im folgenden wird an einem Beispiel gezeigt, daß diese Aussage falsch wird, wenn man die Bedingung (2b) abschwächt zu

c) a ist Nullstelle eines (möglicherweise inseparablen) Polynoms $f(t) \in k[t]$.

Als zweites wird das Beispiel zeigen, daß es über Körpern k der Charakteristik $\chi(k) \neq 0$ kein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür geben kann, daß eine Algebra halbeinfach ist, wie dies für $\chi(k) = 0$ das Nichtverschwinden der Diskriminante ist (s. [1] Kap. III § 5, IV §§ 2, 3).

Die Konstruktion des Beispiels ist ähnlich wie in einer Note von V. D. WAERDEN [5], in der gezeigt wird, daß es kein für alle explizit bekannten Körper gültiges Irreduzibilitätskriterium, also erst recht kein Verfahren zur Primpolynomzerlegung geben kann. Dabei heißt ein Körper explizit bekannt, wenn seine Elemente Symbole aus einem abzählbaren Vorrat sind und sich die vier Rechenoperationen in endlich vielen Schritten ausführen lassen. Man überlegt sich leicht, daß alle im folgenden auftretenden Körper explizit bekannt sind. Wie in [5] sei $E(n)$ eine Aussage über die natürliche Zahl n, von der für jedes feste n in endlich vielen Schritten entschieden werden kann, ob sie richtig oder falsch ist. Zu jeder solchen Aussage konstruieren wir einen Körper k, eine endliche inseparable Erweiterung K/k und ein Polynom $f(t) \in K[t]$, so daß in k die Primpolynomzerlegung in endlich vielen Schritten möglich ist, die Reduzibilität von $f(t)$ aber gleichbedeutend ist mit der Aussage: „Es gibt ein n mit der Eigenschaft $E(n)$." Ein Verfahren zur Primpolynomzerlegung unter der Voraussetzung 2c) würde also ein Verfahren zur

[1]) Literaturverzeichnis [3] § 4 oder [4] § 37.

Beantwortung der Frage: „Gibt es ein n mit der Eigenschaft $E(n)$?" liefern, und das ist bei Zugrundelegung einer genauen Definition des Begriffes „Verfahren" nicht möglich (s. [2] und die dort angegebene Literatur).

Es sei jetzt P der Primkörper der Charakteristik $p \neq 0$ und $k_0 = P(x, y)$ der Körper der rationalen Funktionen in den beiden Unbestimmten x und y. Bezeichnen wir mit $u_0 = x, u_1, u_2, \ldots$ die sämtlichen Elemente von k_0 in irgendeiner festen Reihenfolge, so gibt es unter den Unterkörpern $k_0(\sqrt[p]{u_n})$ von $k_0(\sqrt[p]{x}, \sqrt[p]{y})$ unendlich viele verschiedene; streichen wir daher aus der Reihe der u_n diejenigen, für die entweder $k_0(\sqrt[p]{u_n}) = k_0$ oder $k_0(\sqrt[p]{u_n}) = k_0(\sqrt[p]{u_m})$ mit $m < n$ ist, so bleibt eine unendliche Reihe $v_0 = x, v_1, v_2, \ldots$ übrig mit der Eigenschaft, daß für jedes n entweder $k_0(\sqrt[p]{u_n}) = k_0$ oder $k_0(\sqrt[p]{u_n}) = k_0(\sqrt[p]{v_m})$ für genau ein $m = q(n)$ ist. Wir setzen jetzt induktiv mit $k_0 = P(x, y)$ beginnend

$$k_n = \begin{cases} k_{n-1}(\sqrt[p]{v_n}), & \text{wenn } n \text{ die kleinste Zahl mit der Eigenschaft } E(n) \text{ ist,} \\ k_{n-1} & \text{sonst.} \end{cases}$$

In $k = \bigcup_{n=0}^{\infty} k_n$ ist dann die Primpolynomzerlegung in endlich vielen Schritten möglich. Ist nämlich $f(t) \in k[t]$, so liegen die Koeffizienten von $f(t)^p$ in $k_0 = P(x, y)$. Die Primfaktorzerlegung $f(t)^p = g(t)\, h(t) \ldots$ von $f(t)^p$ in $k_0[t]$ läßt sich daher nach (1) und (2a) ausführen. Wenn wir nun die Primpolynome $g(t), h(t), \ldots$ aus $k_0[t]$ in $k[t]$ zerlegen können, so erhalten wir die Primfaktorzerlegung von $f(t)^p$ und damit auch von $f(t)$ in $k[t]$. Um das zu erreichen nehmen wir einmal an, es sei $g(t) = g_1(t)\, g_2(t) \ldots$ mit Primpolynomen $g_i(t) \in k[t]$; dann folgt $g(t)^p = g_1(t)^p\, g_2(t)^p \ldots$ und da $g_1(t)^p$ in $k_0[t]$ liegt und $g(t)$ in $k_0[t]$ irreduzibel ist, muß $g(t)$ ein Teiler von $g_1(t)^p$ sein, also $g(t) = g_1(t)$ oder $g(t) = g_1(t)^p$. Eine Zerlegung der zweiten Art ist nun genau dann möglich, wenn $g(t)$ ein Polynom in t^p ist, dessen Koeffizienten p-te Potenzen in k sind. Es bleibt also für endlich viele Werte n zu untersuchen, ob die Gleichung $z^p = u_n$ in k eine Lösung besitzt. Dazu muß sie entweder eine Lösung in $k_0 = P(x, y)$ haben — ob das der Fall ist, läßt sich nach (1) und (2a) entscheiden — oder es muß $k_0(\sqrt[p]{u_n}) = k_0(\sqrt[p]{v_m})$ in k liegen, und das trifft genau dann zu, wenn m die kleinste Zahl mit der Eigenschaft $E(m)$ ist; ob das der Fall ist, läßt sich aber auf Grund der Voraussetzung über die Eigenschaft E in endlich vielen Schritten feststellen.

Auf Grund der Konstruktion von k ist entweder $k = k_0$ oder $k = k_0(\sqrt[p]{v_n})$ mit $n > 0$; in jedem Fall ist $\sqrt[p]{x} = \sqrt[p]{v_0}$ nicht in k enthalten; also ist $K = k(\sqrt[p]{x})$ eine inseparable Erweiterung von k und es gilt

$$K = \begin{cases} k_0(\sqrt[p]{v_n}, \sqrt[p]{x}) = k_0(\sqrt[p]{x}, \sqrt[p]{y}), & \text{wenn es ein } n \text{ mit der Eigenschaft } E(n) \text{ gibt,} \\ k_0(\sqrt[p]{x}) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Polynom $t^p - y$ ist also genau dann in K reduzibel, wenn es ein n gibt, für das die Aussage $E(n)$ richtig ist; andererseits erfüllt K/k die Bedingung (2c), womit gezeigt ist, daß (2b) nicht durch (2c) ersetzt werden kann.

Betrachten wir jetzt den Restklassenring $R = K[t]/(t^p - y)$, so zeigt sich, daß R genau dann halbeinfach ist, wenn $t^p - y$ in K irreduzibel ist, wenn es also kein n mit der Eigenschaft $E(n)$ gibt. Damit ist auch gezeigt, daß es über Körpern der Charakteristik $p \neq 0$ kein allgemeines Halbeinfachheitskriterium geben kann.

Literatur.

[1] DEURING, M.: Algebren. In Ergebnisse der Mathematik, Bd. 4, H. 1. 1935. — [2] KLEENE, S. C.: Recursive Predicates and Quantifiers. Trans. Amer. Math. Soc. **53**, 41—73 (1943). — [3] KRONECKER, L.: Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen. J. angew. Math. **92**, 1—122 (1882). — [4] WAERDEN, B. L. v. D.: Moderne Algebra, 1. Aufl., Bd. 1. Springer 1930. — [5] WAERDEN, B. L. v. D.: Eine Bemerkung über die Unzerlegbarkeit von Polynomen. Math. Ann. **102**, 738—739 (1930).

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 7. Juli 1952.)

Lorenzen, P.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 241—243 (1953)

Eine Bemerkung über die Abzählbarkeitsvoraussetzung in der Algebra.

Von
Paul Lorenzen.

§ 1. Ob eine Möglichkeit besteht, über den Unterschied zwischen „endlich" und „unendlich" hinaus noch innerhalb des Unendlichen weitere Unterschiede zu machen, etwa zwischen „abzählbar" und „überabzählbar" oder gar zwischen $\aleph_0, \aleph_1, \ldots, \aleph_\omega, \ldots$ das ist eine Frage, die sicherlich nicht zur Algebra gehört. Sie verlangt zu ihrer Beantwortung eine Klärung des Begriffes „Menge", gehört also zu den Grundlagenfragen der Analysis.

Auf Grund der von der Analysis übernommenen *Meinung* von der Existenz verschiedener Unendlich ist es in der Algebra üblich geworden, zumindest zwischen „abzählbar" und „überabzählbar" zu unterscheiden. Da man allerdings dort, wo angeblich keine Abzählung möglich ist, das Auswahlprinzip — indem man es als Axiom bezeichnet, glaubt man sich der Verpflichtung enthoben, es zu begründen — anwendet, lassen sich die Beweise für den „abzählbaren" Fall meist ohne weiteres auf den „überabzählbaren" Fall übertragen. Läßt man die Abzählbarkeitsvoraussetzung fort, so erfordert das meist nur eine einfache Modifikation. Mit dem sog. Zornschen Lemma ist zudem die Technik dieser Modifikation so bequem geworden, daß die Abzählbarkeitsvoraussetzung oft nur um der einfacheren und anschaulicheren Formulierbarkeit des algebraischen Problems gemacht wird.

Es gibt wohl nur wenige Fälle, in denen diese Patentlösung des Auswahl-„axioms" versagt. In der Theorie der abelschen Gruppen z.B. liegt jedoch sogar der Fall vor, daß eine gewisse algebraische Eigenschaft zwar allen „abzählbaren" Gruppen zukommt, gleichzeitig aber an einem Beispiel einer „überabzählbaren" Gruppe bewiesen werden kann, daß nicht allen Gruppen diese Eigenschaft zukommt. Es handelt sich dabei um die direkte Zerlegbarkeit in zyklische Summanden der primären abelschen Gruppen, deren sämtliche Elemente endliche Ordnung und endliche Höhe haben. Der Satz, daß für alle abzählbaren Gruppen diese Zerlegbarkeit gilt, ist von H. Prüfer [*1*] bewiesen worden. Andererseits hat H. Ulm [*2*] — nach dem Vorgange von Prüfer — für jede Primzahl p eine „überabzählbare" abelsche Gruppe G_p konstruiert, deren sämtliche Elemente endliche p-Potenzen als Ordnungen haben und endliche Höhe haben (d.h. für kein Element x von G_p sind die Gleichungen $p^k x' = x$ für jedes k nach x' auflösbar); G_p hat außerdem die Eigenschaft, daß die Faktorgruppe $G_p/p\,G_p$ eine abzählbare Vertretermenge in G_p hat. Mit der Cantorschen Mengenlehre (in naiver oder axiomatischer Form) schließt man jetzt folgendermaßen auf die Unzerlegbarkeit von G_p in direkte zyklische Summanden:

(1) Jede direkte Zerlegung von G_p in zyklische Summanden hat „überabzählbar" viele Summanden, weil bei abzählbar vielen Summanden auch G_p abzählbar wäre.

(2) Jede direkte Zerlegung von G_p in zyklische Summanden hat abzählbar viele Summanden, weil bei „überabzählbar" vielen Summanden auch jede Vertretermenge von $G_p/p\,G_p$ „überabzählbar" wäre.

In § 2 wird die Gruppe G_p mit den Mitteln der konstruktiven Mathematik [3] dargestellt. Es zeigt sich dabei, daß G_p „hyperabzählbar" ist, d.h. daß eine Abzählung zwar möglich ist, aber erst mit einer Hyperaussage (aus einer Hyperschicht). $G_p/p\,G_p$ hat dagegen auch hier eine Vertretermenge, die „abzählbar" ist, d.h. mit einer Aussage (aus einer Schicht endlicher Höhe) abzählbar ist. Ersetzt man nun in (1) und (2) das Wort „überabzählbar" durch „hyperabzählbar", so bleibt zwar (1) gültig, (2) dagegen wird ungültig. Es gibt nämlich eine *Hyperfolge*

$$Z^* = Z^{(1)},\ Z^{(2)}, \ldots$$

derart, daß G_p direkte Summe der zyklischen Gruppen $Z^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ist, und gleichzeitig gibt es eine *Folge* $x^* = x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$, derart, daß $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots\}$ Vertretermenge von $G_p/p\,G_p$ ist. Hieraus ergibt sich kein Widerspruch mehr, weil die Zuordnung, die dem erzeugenden Element $z^{(k)}$ aus $Z^{(k)}$ seinen Vertreter $x^{(l^{(k)})}$ zuordnet, nicht durch eine Aussage definierbar zu sein braucht — diese Zuordnung ist hier nur durch eine Hyperaussage definierbar. Wäre diese Zuordnung durch eine Aussage definierbar, dann wäre Z^* eine Folge — nur soweit bleibt (2) gültig und ist daher in unserem Falle nicht anwendbar.

Diese Untersuchung zeigt also, daß die Unzerlegbarkeit von G_p nur dann besteht, wenn man die sprachlichen Mittel (die Hyperaussagen) mit denen sich G_p abzählen läßt, nicht zur Anwendung bringt. Eine solche freiwillige Beschränkung der sprachlichen Mittel hat nun zwar für die Analysis ihre Berechtigung (ohne diese Beschränkung wäre die Gültigkeit des Vollständigkeitsprinzips für die reellen Zahlen nicht zu erreichen), für die Algebra erscheint sie jedoch völlig willkürlich. Die Algebra geht axiomatisch von einer „Menge" mit gegebenen Relationen und Verknüpfungen aus — von den Mitteln, mit denen die Elemente der Menge konstruierbar sind, ist dabei gar keine Rede. Da nun aber zu jeder Konstruktion von Elementen auch eine „Sprache" existiert, in der alle konstruierbaren Elemente abzählbar sind, so ist für die Algebra die Benutzung dieser Sprache augenscheinlich am zweckmäßigsten. Sie hat zumindest den Vorteil, daß alle diejenigen algebraischen Probleme, die man bisher „nur mit Abzählbarkeitsvoraussetzung" lösen konnte, sofort ohne Einschränkung allgemein gelöst sind. Die „überabzählbaren" algebraischen Probleme erweisen sich also als Scheinprobleme. Daß dadurch die Algebra in ihrer Problematik verarmen wird, ist nicht zu befürchten, es werden vielmehr nur die wirklichen Probleme deutlicher hervortreten.

§ 2. Wir betrachten Folgen $a = a^* = a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots$, deren Glieder $a^{(k)}$ aus der Menge $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ genommen sind, so daß unendlich viele Glieder $\neq 0$ sind. Die Hypermenge M aller dieser Folgen ist hyperabzählbar:

$M = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Eine Untermenge von M heißt unabhängig, wenn für jedes System $a_{l_1}, \ldots, a_{l_n}$ aus N und für jedes System $g_1, \ldots, g_n$ ganz-rationaler Zahlen $\not\equiv 0, \ldots, 0 \pmod{p}$ stets $g_1 a_{l_1} + \cdots + g_n a_{l_n} \pmod{p}$ zu M gehört. Mit der Hyperabzählung von M ist sofort eine maximale unabhängige Unterhypermenge N_0 von M zu konstruieren. N_0 kann keine Menge sein, weil sonst auch M eine Menge wäre. Für die Elemente der Hypermenge N_0 werde b als Variable gebraucht: $b = b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots$. Die Paare $x_{b,k}$ (b, k) aus Elementen b von N_0 und natürlichen Zahlen $k = \{1, 2, \ldots\}$ einschließlich der Paare $x_{0,k} = (0, k)$ werden jetzt zur Erzeugung einer abelschen Gruppe G_p mit den Relationen

[1] $$p^l x_{0,l} = 0$$

[2] $$p\, x_{b,1} = 0$$

[3] $$p\, x_{b,l+1} = x_{b,l} - b^{(l)} x_{0,l}$$

benutzt. Für die Gruppe G_p, die aus den endlichen Summen der Form

$$\sum_l g_l x_{0,l} + \sum_{k,l} g_{k,l} x_{bk,l}$$

besteht, läßt sich wörtlich wie bei Ulm [2] beweisen, daß alle Elemente von G_p endliche Ordnung (p-Potenz) und endliche Höhe haben. Weiter enthält die aus

$$\{x_{0,1}, x_{0,2}, \ldots\}$$

erzeugte Gruppe ersichtlich eine Vertretermenge für $G_p/p\,G_p$. Also ist G_p nur hyperabzählbar und $G_p/p\,G_p$ hat eine abzählbare Vertretermenge

$$\{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots\}.$$

Konstruiert man mit einer Hyperabzählung von G_p nun eine Hyperfolge $Z^* = Z^{(1)}, Z^{(2)}, \ldots$ direkter zyklischer Summanden mit $G_p = \sum Z^*$ — auf die Durchführung dieser Konstruktion kommt es hier nicht an — dann sind die Vertreter $x^{(l^k)}$ der erzeugenden Elemente $z^{(k)}$ von $Z^{(k)}$ alle in der abzählbaren Menge $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots\}$ enthalten. Während aber in der Cantorschen Mengenlehre keine „überabzählbare" Menge durch eine umkehrbare Abbildung in eine „abzählbare" Menge abgebildet werden kann, folgt hier aus der Tatsache, daß ein Teil einer abzählbaren Menge umkehrbar auf eine hyperabzählbare Hypermenge abgebildet ist, kein Widerspruch. Wie jede Hypermenge von natürlichen Zahlen zeigt, kann ja sogar ein Teil einer abzählbaren Menge selbst hyperabzählbar sein.

Literatur.

[1] Prüfer, H.: Math. Z. **17** (1923). — [2] Ulm, H.: Math. Z. **40**, 205 (1936). — [3] Lorenzen, P.: Math. Z. **53**, 162 (1950); **54**, 1 (1951).

Bonn, Luisenstraße 3.

(Eingegangen am 18. Juli 1952.)

Leichtweiss, K.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 244—264 (1953)

Natürliche Gleichungen einer Fläche.

Von
Kurt Leichtweiss.

§ 1. Einleitung.

Bekanntlich ist eine Kurve in der Ebene durch ihre „natürliche Gleichung" $\varkappa = \varkappa(s)$ ($\varkappa =$ Krümmung, $s =$ Bogenlänge) sowie durch das zu $s = 0$ gehörende Linienelement eindeutig bestimmt. Es stellt sich nun das Problem, auf ähnliche Weise auch eine Fläche im dreidimensionalen euklidischen Raum zu charakterisieren. Versuche in dieser Richtung sind schon verschiedentlich unternommen worden[1],[2],[3], insbesondere bewies Rellich, daß sowohl die Gleichung: Mittlere Krümmung = vorgeschriebene Funktion geeignet normierter isothermer Parameter, als auch die Gleichung: Gausssche Krümmung = vorgeschriebene Funktion geeignet normierter Asymptotenlinienparameter als ein gewisses Analogon der natürlichen Gleichung einer Kurve in der Ebene angesehen werden kann.

In der vorliegenden Arbeit wird nun zunächst dieses Resultat Rellichs folgendermaßen verallgemeinert: Es ist im allgemeinen möglich, auf einer analytischen Fläche lokal in eindeutiger Weise solche Parameter (p, q) einzuführen, daß die erste bzw. die zweite bzw. die dritte Grundform dieser Fläche die isotherme Form $D(dp^2 + dq^2)$ annimmt und irgendeine analytisch auf dieser Fläche gelegene Kurve C (mit der Bogenlänge s) durch die Gleichung $p = s$, $q = 0$ dargestellt wird (Lemma); die so festgelegten speziellen Flächenparameter sollen normiert isotherm bzw. normiert affin-isotherm bzw. normiert sphärisch-isotherm genannt werden. Dann ist diese Fläche, von Ausnahmefällen abgesehen, in der Umgebung des Punkts $p = q = 0$ durch eine linear gebrochene Funktion der mittleren Krümmung H und der Gaussschen Krümmung K als Funktion der (normierten isothermen bzw. normierten affin-isothermen bzw. normierten sphärisch-isothermen) Parameter (p, q) sowie durch den durch C gehenden Flächenstreifen eindeutig bestimmt, wobei diese Funktion wie auch der Streifen beliebig analytisch vorgegeben werden können (Sätze 1, 2, 3). Hieraus ergibt sich, daß durch einen analytischen Streifen im allgemeinen genau eine analytische Fläche geht, bei welcher eine linear gebrochene Funktion von H und K konstant ist (Korollar zu Satz 1).

Diese Sätze lassen sich genau so aussprechen, wenn allgemeinere Krümmungsfunktionen Φ der Fläche wie etwa eine ihrer Hauptkrümmungen zur

[1]) Scheffers, G.: Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, Bd. II, S. 341—354. 1902.

[2]) Grünbaum, S.: Über die Bestimmung von Flächen aus ihrer Normalkrümmung längs einer Schar geodätischer Linien. Comm. Math. Helv. **11**, 336—361 (1939).

[3]) Rellich, F.: Die Bestimmung einer Fläche durch ihre Gausssche Krümmung. Math. Z. **43**, 618—627 (1938).

Bildung einer natürlichen Gleichung von ihr zugrunde gelegt werden. Für die hierbei zulässigen Funktionen Φ werden gewisse Bedingungen angegeben.

Die Vorgabe von Φ als Funktion der normierten isothermen bzw. normierten affin-isothermen bzw. normierten sphärisch-isothermen Parameter erweist sich weiterhin in bezug auf die Charakterisierung einer Fläche im Raum als äquivalent mit der Vorgabe von Φ als Funktion allgemeiner Parameter (u, v) und der Vorgabe der von SCHERRER[4]) zu demselben Zweck benutzten, aus der ersten bzw. zweiten bzw. dritten Grundform $A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2$ hergeleiteten relativen ersten bzw. relativen zweiten bzw. relativen dritten Grundform $\frac{A}{\sqrt{Q}}\,du^2 + \frac{2B}{\sqrt{Q}}\,du\,dv + \frac{C}{\sqrt{Q}}\,dv^2$ $(Q = AC - B^2)$. Diese Tatsache führt in Verbindung der vorhin angeführten Sätze zu einer Verallgemeinerung entsprechender Sätze SCHERRERs (Satz 4), woraus speziell die Unabhängigkeit zwischen K oder H und der relativen ersten Grundform im Gegensatz zur bekannten Abhängigkeit zwischen diesen Größen und der ersten Grundform folgt (Korollar zu Satz 4).

Mit der zum Beweis von Satz 1, Satz 2 und Satz 3 angewandten Methode läßt sich übrigens der Satz von DARBOUX über die Realisierung einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit mit analytischer RIEMANNscher Metrik im dreidimensionalen Raum in einfacher Weise beweisen. Eine Darstellung dieses Beweises ist in § 7 angefügt.

§ 2. Einführung spezieller Flächenparameter.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{x}(u, v)$ eine im Punkt $u = v = 0$ analytische Fläche des dreidimensionalen euklidischen Raumes, die Komponenten x_i $(i = 1, 2, 3)$ von $\mathfrak{x}$ seien also Potenzreihen in u und v, welche der Bedingung $\mathfrak{x}_u(0, 0) \times \mathfrak{x}_v(0, 0) \neq 0$ genügen. Weiter soll $A(u, v)\,du^2 + 2B(u, v)\,du\,dv + C(u, v)\,dv^2$ der Ausdruck einer für alle Parametersysteme der Fläche definierten und gegen (differenzierbare) Parametertransformationen invarianten Differentialform in den Parametern (u, v) sein. Die Koeffizienten $A(u, v)$, $B(u, v)$, $C(u, v)$ seien ebenfalls im Punkt $u = v = 0$ analytisch, und es gelte $Q(0, 0) = (AC - B^2)(0, 0) \neq 0$. Schließlich setzen wir voraus, daß auf $\mathfrak{x}(u, v)$ eine durch $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t)$ definierte Kurve C in analytischer Weise gelegen sei, d.h. C besitze die Parameterdarstellung $u = u(t)$, $v = v(t)$, wobei $u(t)$ und $v(t)$ in $t = 0$ analytische Funktionen mit $u(0) = 0$, $v(0) = 0$, $(u'(0))^2 + (v'(0))^2 \neq 0$ sind. Dabei werde zusätzlich noch der Fall $A(0, 0)\,(u'(0))^2 + 2B(0, 0)\,u'(0)\,v'(0) + C(0, 0)\,(v'(0))^2 = 0$ ausgeschlossen. Dann gilt das für unsere folgenden Betrachtungen grundlegende

Lemma: *Die Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ besitzt in der Umgebung ihres Punktes $\mathfrak{x}(0, 0)$ ein und nur ein Parametersystem (p, q), welches den folgenden Bedingungen genügt:*

1. *$\mathfrak{x}(p, q)$ ist in $p = q = 0$ analytisch.*

2. *Unsere quadratische Differentialform besitzt im Parametersystem (p, q) die spezielle Gestalt $D(p, q)\,(dp^2 + \varepsilon\,dq^2)$ $(\varepsilon = \operatorname{sign} Q(0, 0))$.*

[4]) SCHERRER, W.: Stützfunktion und Radius I. Comm. Math. Helv. **22**, 366–381 (1947), Stützfunktion und Radius II. Comm. Math. Helv. **25**, 11—25 (1951).

3. *Die Kurve C wird im Parametersystem (p, q) durch $p(t) = s(t) = \int_0^t \sqrt{\xi_t^2}\, dt$, $q(t) = 0$ dargestellt, d.h. p mißt auf C die vom Punkt $\xi(0, 0)$ aus in Richtung wachsender Parameter t gerechnete Bogenlänge s.*

Beweis. Da es, wie leicht ersichtlich, sicher eine im Flächenpunkt $u = v = 0$ analytische Parametertransformation $\bar{u} = \bar{u}(u, v)$, $\bar{v} = \bar{v}(u, v)$ gibt, nach deren Ausführung die Kurve C in einer gewissen Umgebung dieses Nullpunkts durch $\bar{u}(t) = s(t)$, $\bar{v}(t) = 0$ dargestellt wird, so wird die Existenz des gesuchten Parametersystems (p, q) erwiesen sein, wenn wir folgendes gezeigt haben: Es gibt eine im Nullpunkt $\bar{u} = \bar{v} = 0$ analytische Parametertransformation $p = p(\bar{u}, \bar{v})$, $q = q(\bar{u}, \bar{v})$ mit $p(\bar{u}, 0) = \bar{u}$, $q(\bar{u}, 0) = 0$, welche so beschaffen ist, daß sie die quadratische Differentialform $A(u, v)\, du^2 + 2B(u, v)\, du\, dv + C(u, v)\, dv^2 = \bar{A}(\bar{u}, \bar{v})\, d\bar{u}^2 + 2\bar{B}(\bar{u}, \bar{v})\, d\bar{u}\, d\bar{v} + \bar{C}(\bar{u}, \bar{v})\, d\bar{v}^2$ in die spezielle Form

$$D(p, q)\,(dp^2 + \varepsilon\, dq^2)$$

überführt. Dazu integrieren wir zunächst die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\dfrac{\bar{C}}{\sqrt{|\bar{Q}|}}\, p_{\bar{u}} - \dfrac{\bar{B}}{\sqrt{|\bar{Q}|}}\, p_{\bar{v}}\right)_{\bar{u}} - \left(-\dfrac{\bar{B}}{\sqrt{|\bar{Q}|}}\, p_{\bar{u}} + \dfrac{\bar{A}}{\sqrt{|\bar{Q}|}}\, p_{\bar{v}}\right)_{\bar{v}} = 0 \\ \text{oder} \\ p_{\bar{v}\bar{v}} = \dfrac{\sqrt{|\bar{Q}|}}{\bar{A}}\, \Psi\Big(\dfrac{\bar{B}}{\sqrt{|\bar{Q}|}},\ \dfrac{\bar{C}}{\sqrt{|\bar{Q}|}},\ \Big(\dfrac{\bar{B}}{\sqrt{|\bar{Q}|}}\Big)_{\bar{u}},\ \Big(\dfrac{\bar{C}}{\sqrt{|\bar{Q}|}}\Big)_{\bar{u}},\ \Big(\dfrac{\bar{A}}{\sqrt{|\bar{Q}|}}\Big)_{\bar{v}},\ \Big(\dfrac{\bar{B}}{\sqrt{|\bar{Q}|}}\Big)_{\bar{v}}; \\ \qquad\qquad p_{\bar{u}}, p_{\bar{v}}, p_{\bar{u}\bar{u}}, p_{\bar{u}\bar{v}}\Big) \end{array} \right.$$

(Ψ ist ganz rational in allen seinen Argumenten!)

in der Umgebung des Nullpunkts unter den Anfangsbedingungen $p(\bar{u}, 0) = \bar{u}$ und $p_{\bar{v}}(\bar{u}, 0) = \dfrac{\bar{B}(\bar{u}, 0)}{\bar{A}(\bar{u}, 0)}$, was nach einem Satz von S. KOWALEWSKI[5]) wegen der Analytizität von $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ sowie wegen

$$\bar{A}(0, 0) = \frac{A(0, 0)\,(u'(0))^2 + 2B(0, 0)\,u'(0)\,v'(0) + C(0, 0)\,(v'(0))^2}{(\bar{u}'(0))^2} \neq 0;$$

$$\bar{Q}(0, 0) = Q(0, 0)\left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}(0, 0)\right)^2 \neq 0$$

stets analytisch in eindeutiger Weise möglich ist. Dann bilden wir mit der so gewonnenen Funktion $p(\bar{u}, \bar{v})$ die Funktion:

$$q(\bar{u}, \bar{v}) = \varepsilon \cdot \eta \int_0^{(\bar{u}, \bar{v})} \left(\frac{\bar{B}}{\sqrt{|\bar{Q}|}}\, p_{\bar{u}} - \frac{\bar{A}}{\sqrt{|\bar{Q}|}}\, p_{\bar{v}}\right) d\bar{u} + \left(\frac{\bar{C}}{\sqrt{|\bar{Q}|}}\, p_{\bar{u}} - \frac{\bar{B}}{\sqrt{|\bar{Q}|}}\, p_{\bar{v}}\right) d\bar{v}$$

$$(\eta = \operatorname{sign} \bar{A}(0, 0)),$$

welche wegen (1) eindeutig definiert ist. Auf diese Art haben wir in $p(\bar{u}, \bar{v})$ und $q(\bar{u}, \bar{v})$ zwei im Nullpunkt analytische Funktionen gewonnen, welche dem

[5]) Siehe z.B. GOURSAT, E.: Cours d'Analyse **2**, 633 (1911).

Gleichungssystem

$$(2)\qquad \begin{cases} q_{\bar u} = \varepsilon\,\eta\left(\dfrac{\bar B}{\sqrt{|\bar Q|}}\,p_{\bar u} - \dfrac{\bar A}{\sqrt{|\bar Q|}}\,p_{\bar v}\right) \\ q_{\bar v} = \varepsilon\,\eta\left(\dfrac{\bar C}{\sqrt{|\bar Q|}}\,p_{\bar u} - \dfrac{\bar B}{\sqrt{|\bar Q|}}\,p_{\bar v}\right) \end{cases}$$

bzw. dessen Umkehrung

$$(3)\qquad \begin{cases} p_{\bar u} = \eta\left(-\dfrac{\bar B}{|\bar Q|}\,q_{\bar u} + \dfrac{\bar A}{|\bar Q|}\,q_{\bar v}\right) \\ p_{\bar v} = \eta\left(-\dfrac{\bar C}{|\bar Q|}\,q_{\bar u} + \dfrac{\bar B}{|\bar Q|}\,q_{\bar v}\right) \end{cases}$$

genügen. Hieraus folgt nun zunächst $q(0,0)=0$ und $q_{\bar u}(\bar u, 0)=0$, d.h. $q(\bar u, 0)=0$, sowie natürlich $p(\bar u, 0)=\bar u$. Wegen $\dfrac{\partial(p,q)}{\partial(\bar u,\bar v)}(0,0)=\eta\dfrac{\sqrt{|\bar Q|}(0,0)}{\bar A(0,0)}>0$ wird also durch $p=p(\bar u,\bar v)$, $q=q(\bar u,\bar v)$ eine im Nullpunkt analytische Parametertransformation definiert, welche außerdem die Eigenschaft hat, daß sie unsere quadratische Differentialform $\bar A(\bar u,\bar v)\,d\bar u^2+2\bar B(\bar u,\bar v)\,d\bar u\,d\bar v+\bar C(\bar u,\bar v)\,d\bar v^2$ in die spezielle Form $D(p,q)\,(dp^2-\varepsilon\,dq^2)$ bringt. Es ist nämlich in der Tat:

$$D(dp^2+\varepsilon\,dq^2)=D\left[(p_{\bar u}^2-\varepsilon\,q_{\bar u}^2)\,d\bar u^2+2(p_{\bar u}p_{\bar v}-\varepsilon\,q_{\bar u}q_{\bar v})\,d\bar u\,d\bar v+(p_{\bar v}^2+\varepsilon\,q_{\bar v}^2)\,d\bar v^2\right]$$

(nach Einsetzung von (2))

$$=D\left(\frac{\bar A}{\bar Q}p_{\bar v}^2-2\frac{\bar B}{\bar Q}p_{\bar u}p_{\bar v}+\frac{\bar C}{\bar Q}p_{\bar u}^2\right)(\bar A\,d\bar u^2+2\bar B\,d\bar u\,d\bar v+\bar C\,d\bar v^2)$$

$$=\bar A\,d\bar u^2-2\bar B\,d\bar u\,d\bar v+\bar C\,d\bar v^2,\quad\text{wenn wir}$$

$$D=\frac{\bar Q}{\bar A p_{\bar v}^2-2\bar B p_{\bar u}p_{\bar v}+\bar C p_{\bar u}^2}\quad\text{setzen}^{6}).$$

Wir nehmen nun an, es gebe zwei verschiedene Parametersysteme (p,q) und $(\bar p,\bar q)$ unserer verlangten Art. Jetzt folgt aus $\mathfrak{n}(0,0)=\sigma\left(\mathfrak{x}_u(0,0)\times\mathfrak{x}_{\bar v}(0,0)\right)=\tau\left(\mathfrak{x}_p(0,0)\times\mathfrak{x}_q(0,0)\right)$ ($\mathfrak{n}$ ist der Normalenvektor der Fläche, $\sigma>0$, $\tau>0$) oder $\sigma\dfrac{\partial(x_i,x_k)}{\partial(u,v)}(0,0)=\tau\dfrac{\partial(x_i,x_k)}{\partial(p,q)}(0,0)$ $(i,k=1,2,3)$, daß für ein Komponentenpaar x_{i_1}, x_{i_2} von $\mathfrak{x}$ die Funktionaldeterminanten $\dfrac{\partial(x_{i_1},x_{i_2})}{\partial(u,v)}(0,0)$ und $\dfrac{\partial(x_{i_1},x_{i_2})}{\partial(p,q)}(0,0)$ gleichzeitig von Null verschieden sind. Somit können wir wegen der Analytizität von $\mathfrak{x}(u,v)$ und $\mathfrak{x}(p,q)$ im Nullpunkt die Größen x_{i_1} und x_{i_2} aus den Gleichungssystemen $\begin{matrix}x_{i_1}=x_{i_1}(u,v)\\ x_{i_2}=x_{i_2}(u,v)\end{matrix}$ und $\begin{matrix}x_{i_1}=x_{i_1}(p,q)\\ x_{i_2}=x_{i_2}(p,q)\end{matrix}$ eliminieren. Hieraus ergibt sich, daß die Beziehung zwischen den Parametersystemen (u,v) und (p,q) durch im Nullpunkt analytische Funktionen $p=p(u,v)$, $q=q(u,v)$ mit $\dfrac{\partial(p,q)}{\partial(u,v)}(0,0)>0$ vermittelt wird. Dasselbe gilt ebenso für die

[6]) Denn $\bar A(0,0)\,(p_{\bar v}(0,0))^2-2\bar B(0,0)\,p_{\bar u}(0,0)\,p_{\bar v}(0,0)+\bar C(0,0)\,(p_{\bar u}(0,0))^2=\dfrac{\bar Q(0,0)}{\bar A(0,0)}\neq 0$.

Parametersysteme (u, v) und $(\bar{p}, \bar{q})$. Aus der Invarianz unserer quadratischen Differentialform gegen die Parametertransformation $\bar{p} = \bar{p}(u, v)$, $\bar{q} = \bar{q}(u, v)$ folgt nun $\varepsilon D(0,0)^2 = Q(0,0)\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{p},\bar{q})}(0,0)\right)^2 \neq 0$, d.h. $D(0,0) \neq 0$ und genau so $\bar{D}(0,0) \neq 0$. Weiter führt die nach Voraussetzung für die im Nullpunkt analytischen Funktionen $\bar{p}(p,q) = \bar{p}(u(p,q), v(p,q))$, $\bar{q}(p,q) = \bar{q}(u(p,q), v(p,q))$ geltende Beziehung $D(p,q)(dp^2 + \varepsilon dq^2) = \bar{D}(\bar{p},\bar{q})(d\bar{p}^2 + \varepsilon d\bar{q}^2)$ aus diesem Grunde zu den beiden in der Umgebung von $p = q = 0$ gültigen Gleichungen:

$$\bar{p}_p^2 + \varepsilon \bar{q}_p^2 = \varepsilon(\bar{p}_q^2 + \varepsilon \bar{q}_q^2) \tag{4}$$

und

$$\bar{p}_p \bar{p}_q = -\varepsilon \bar{q}_p \bar{q}_q. \tag{5}$$

Multiplizieren wir jetzt (4) mit $\bar{p}_p^2$, und setzen wir dann darin die quadrierte Gl. (5) ein, so erhalten wir: $(\bar{p}_p^2 - \bar{q}_q^2)(\bar{p}_p^2 + \varepsilon \bar{q}_p^2) = 0$. Daraus ergibt sich unter Beachtung der ebenfalls nach Voraussetzung gültigen Beziehungen

$$\bar{p}(p,0) = p, \qquad \bar{q}(p,0) = 0, \tag{6}$$

d.h. $\bar{p}_p(0,0) = 1$, $\bar{q}_p(0,0) = 0$, sowie unter Beachtung von $\frac{c(\bar{p},\bar{q})}{c(p,q)}(0,0) > 0$:

$$\bar{q}_q(p,q) = \bar{p}_p(p,q), \tag{7}$$

was wegen (5)

$$\bar{p}_q(p,q) = -\varepsilon \bar{q}_p(p,q) \tag{8}$$

zur Folge hat. Da nun aber die Funktionen $\bar{p}(p,q)$ und $\bar{q}(p,q)$ genau wie die Funktionen $h_1(p,q) = p$ und $h_2(p,q) = q$ den Differentialgleichungen (7) und (8) mit den Anfangsbedingungen (6) genügen, so können wir nach dem schon einmal angewandten Satz von KOWALEWSKI auf die Gültigkeit der Beziehungen $\bar{p}(p,q) = p$, $\bar{q}(p,q) = q$ schließen, womit auch die Einzigkeit eines unseren drei Bedingungen genügenden Parametersystems bewiesen ist.

Wenden wir nun unser Lemma auf den speziellen Fall an, daß die auf der Fläche definierte quadratische Differentialform gerade die erste bzw. dritte bzw. zweite Grundform der Fläche ist, so ergibt sich folgendes: Es ist stets auf genau eine Art möglich, auf einer lokal analytischen Fläche $\mathfrak{x}(u,v)$ lokal analytische Parameter (p,q) einzuführen, in welchen die erste bzw. dritte bzw. zweite Grundform dieser Fläche die isotherme Form annimmt und eine beliebig in analytischer Weise auf $\mathfrak{x}(u,v)$ liegende Kurve C durch $p = s$, $q = 0$ dargestellt wird. Dabei muß jedoch im Falle der dritten Grundform wegen $eg - f^2 = K^2(EG - F^2)$ ($K(u,v)$ ist die GAUSSsche Krümmung von $\mathfrak{x}(u,v)$) zusätzlich $K(0,0) \neq 0$ und im Falle der zweiten Grundform wegen $LN - M^2 = K(EG - F^2)$ und $L(u')^2 + 2Mu'v' + N(v')^2 = b(E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2)$ [b ist die Normalkrümmung des durch $u = u(t)$, $v = v(t)$ auf $\mathfrak{x}(u,v)$ gegebenen Streifens] zusätzlich $K(0,0) \neq 0$ und $b(0) \neq 0$ vorausgesetzt werden[7]). Wir werden die so definierten Flächenparameter künftighin „auf C bezogene"

[7]) Die Bezeichnung der drei Grundformen einer Fläche ist dieselbe wie diejenige in W. BLASCHKE, Differentialgeometrie, 3. Aufl., Bd. I, S. 88. 1930.

der kurz „normierte" isotherme bzw. sphärisch-isotherme bzw. affin-isotherme Parameter nennen und sie zur Bildung von natürlichen Gleichungen der Fläche benutzen.

§ 3. Natürliche Gleichungen einer Fläche in normierten isothermen Parametern.

Wir verstehen in Analogie zur Theorie der Kurven in der Ebene unter dem Begriff einer natürlichen Gleichung einer Fläche eine solche Beziehung zwischen einer auf der Fläche definierten Krümmungsfunktion Φ und speziell auf der Fläche gewählten Parametern (p, q), so daß diese Fläche dadurch und durch einen auf ihr liegenden Streifen Γ eindeutig charakterisiert wird. Dann zeigt der folgende Satz, daß bei der Bildung von natürlichen Gleichungen einer analytischen Fläche unter Zugrundelegung normierter[8]) isothermer Parameter an die Stelle der Krümmung $\varkappa$ bei Kurven in der Ebene eine linear gebrochene Funktion der mittleren Krümmung H und der Gaussschen Krümmung K als Krümmungsfunktion Φ treten kann:

Satz 1. *Ist Γ ein durch $\{\mathfrak{x}(s), \mathfrak{n}(s)\}$ (s = Bogenlänge) gegebener, in $s=0$ analytischer Streifen (d.h. ein Streifen, bei dem diese Funktionen in $s=0$ analytisch sind) und $f(p, q)$ irgendeine in $p=q=0$ analytische Funktion, so gibt es in der Umgebung von $p=q=0$, von Ausnahmefällen abgesehen, eine und nur eine Fläche $\mathfrak{x}(p, q)$, die folgenden Bedingungen genügt:*

1. *$\mathfrak{x}(p, q)$ ist in $p=q=0$ analytisch.*
2. *Die Fläche geht für $p=s$, $q=0$ durch den Streifen Γ.*
3. *(p, q) sind isotherme Parameter der Fläche.*
4. $\dfrac{2l_1 H(p,q) + l_2 K(p,q) + l_3}{2m_1 H(p,q) + m_2 K(p,q) + m_3} = f(p,q)$ *$\left((l_1, l_2, l_3; m_1, m_2, m_3$ sind konstant, der Rang der Matrix $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$ ist $2\right)$.*

Beweis. Wir beweisen diesen Satz durch Zurückführung auf das von Bonnet gelöste Problem der Bestimmung einer Fläche durch ihre erste und zweite Grundform. Zu diesem Zweck müssen wir zunächst die Bedingungen 1. bis 4. in den Koeffizienten der ersten und zweiten Grundform von $\mathfrak{x}(p, q)$ ausdrücken. Dies liefert uns die folgenden Beziehungen:

1. Die Funktionen $E(p, q)$, $F(p, q)$, $G(p, q)$ und $L(p, q)$, $M(p, q)$, $N(p, q)$ sind in $p=q=0$ analytisch.

2. Der durch $p=s$, $q=0$ gegebene Flächenstreifen $\{\mathfrak{x}(s, 0), \mathfrak{n}(s, 0)\}$ ist mit Γ identisch, die Invarianten a, b, c von Γ[9]) stimmen also mit den entsprechenden Invarianten dieses Flächenstreifens überein. Daraus folgt unter

[8]) Wir müssen, um von einer eindeutig definierten natürlichen Gleichung einer Fläche reden zu können, natürlich verlangen, daß die Parameter durch die Fläche und den auf ihr liegenden Streifen eindeutig bestimmt sind. Dies ist nach unserem Lemma nur für normierte isotherme, nicht aber für beliebige isotherme Parameter der Fall.

[9]) Die Bezeichnung der Streifeninvarianten stammt aus Blaschke, a. a. O.[7]), S. 68.

Berücksichtigung der Ableitungsgleichungen von $\mathfrak{x}(p, q)$:

$$a(p) = \frac{1}{E}(\mathfrak{x}_p, \mathfrak{n}, \mathfrak{n}_p)|_{q=0} = \frac{EM - FL}{EW}\Big|_{q=0}$$

$$b(p) = \frac{1}{E}\mathfrak{x}_p \mathfrak{n}_p|_{q=0} = -\frac{L}{E}\Big|_{q=0} \qquad (W = \sqrt{EG - F^2})$$

$$c(p) = \frac{1}{\sqrt{E^3}}(\mathfrak{n}, \mathfrak{x}_p, \mathfrak{x}_{pp})|_{q=0} = \frac{2EF_p - FE_p - EE_q}{2\sqrt{E^3 \cdot W}}\Big|_{q=0}$$

mit $E(p, 0) = 1$.

3. $G = E$, $F = 0$ und

4. $$\frac{l_1(EN - 2FM + GL) + l_2(LN - M^2) + l_3(EG - F^2)}{m_1(EN - 2FM + GL) + m_2(LN - M^2) + m_3(EG - F^2)} = f.$$

Nach Vereinfachung dieser Gleichungen mit Hilfe der Beziehungen $F(p, q) = 0$, $G(p, q) = E(p, q)$ und $E(p, 0) = 1$ ergibt sich:

(9) $$E(p, 0) = 1,\ E_q(p, 0) = -2c(p),\ L(p, 0) = -b(p),\ M(p, 0) = a(p)$$

und

(10) $$\frac{l_1 E(L + N) + l_2(LN - M^2) + l_3 E^2}{m_1 E(L + N) + m_2(LN - M^2) + m_3 E^2} = f.$$

Dazu kommen nun außerdem die Integrabilitätsbedingungen für die Koeffizienten der ersten und zweiten Grundform, welche in den isothermen Parametern (p, q) die spezielle Gestalt

(11)
$$\begin{cases} -E\left((\log E)_{pp} + (\log E)_{qq}\right) = 2(LN - M^2) & \text{(Theorema egregium)} \\ 2E(L_q - M_p) = E_q(L + N) & \text{(Gleichungen} \\ 2E(M_q - N_p) = -E_p(L + N) & \text{von MAINARDI-CODAZZI)} \end{cases}$$

annehmen.

Um jetzt die Existenz einer unsere vier Postulate erfüllenden Fläche $\mathfrak{x}(p, q)$ nachzuweisen, müssen wir zuerst die zu dieser Fläche gehörenden Funktionen $E(p, q)$, $L(p, q)$, $M(p, q)$ und $N(p, q)$ aus (9), (10) und (11) bestimmen. Dazu lösen wir die Gl. (10) nach N auf und setzen das Resultat $N = \frac{\varphi_1(f, E, L, M)}{\varphi_2(f, E, L)}$ (φ_1 ist ganz rational in f, E, L, M; $\varphi_2 = (l_1 - m_1 f)E + (l_2 - m_2 f)L$) in (11) ein. Wir erhalten so für die Unbekannten E, L, M das Gleichungssystem:

(12)
$$\begin{cases} E_{qq} = \frac{E_p^2}{E} + \frac{E_q^2}{E} - E_{pp} + 2(M^2 - LN) = \frac{1}{E \cdot \varphi_2} \Psi_1(f, E, E_p, E_q, E_{pp}, L, M) \\ L_q = \frac{E_q}{2E}(L + N) + M_p = \frac{1}{E \cdot \varphi_2} \Psi_2(f, E, E_q, L, M, M_p) \\ M_q = -\frac{E_p}{2E}(L + N) + N_p \\ \quad = \frac{1}{E(\varphi_2)^2} \Psi_3(f, f_p, E, E_p, L, L_p, M, M_p), \end{cases}$$

wobei die Funktionen Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 alle in ihren sämtlichen Argumenten ganz rational sind. Dieses System zusammen mit den Anfangsbedingungen (9) ist aber, von dem Ausnahmefall $\varphi_2(f(0, 0), E(0, 0), L(0, 0)) = 0$ abgesehen, nach

dem Satz von KOWALEWSKI wegen der Analytizität von $f(p, q)$ und von $a(p), b(p), c(p)$ in $p = q = 0$ in der Umgebung dieses Punktes eindeutig in analytischer Weise lösbar. Wir kennen somit die Funktionen $E(p, q)$, $L(p, q)$ und $M(p, q)$ und können jetzt die übrigen Koeffizienten der ersten und zweiten Grundform der gesuchten Fläche $\mathfrak{x}(p, q)$, nämlich die Funktionen $F(p, q)$, $G(p, q)$ und $N(p, q)$, mittels der Beziehungen $F = 0$, $G = E$ und $N = \frac{\varphi_1(f, E, L, M)}{\varphi_2(f, E, L)}$ berechnen. $\mathfrak{x}(p, q)$ bestimmt sich dann nach dem Satz von BONNET[10]) als diejenige Fläche, welche die Differentialformen $E(dp^2 + dq^2)$ und $L\,dp^2 + 2M\,dp\,dq + N\,dq^2$ zur ersten und zweiten Grundform hat und welche durch eine geeignete Bewegung in eine Lage im Raum gebracht worden ist, die durch die Bedingungen $\mathfrak{x}(0, 0) = \mathfrak{x}(0)$, $\mathfrak{x}_p(0, 0) = \mathfrak{x}_p(0)$, $\mathfrak{n}(0, 0) = \mathfrak{n}(0)$ eindeutig festgelegt ist. Diese Fläche erfüllt nun in der Tat unsere vier Postulate, wie man folgendermaßen sieht:

Zunächst gelten für die Vektoren $\mathfrak{x}_p(p, 0)$, $\mathfrak{x}_q(p, 0)$, $\mathfrak{n}(p, 0)$ die Ableitungsgleichungen und die Anfangsbedingungen:

$$\frac{\partial \mathfrak{x}_p}{\partial p} = \Gamma_{11}^1(p, 0)\,\mathfrak{x}_p + \Gamma_{11}^2(p, 0)\,\mathfrak{x}_q + L(p, 0)\,\mathfrak{n}\ ^{11}) \qquad \mathfrak{x}_p(p, 0)|_{p=0} = \mathfrak{x}_p(0, 0)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{x}_q}{\partial p} = \Gamma_{12}^1(p, 0)\,\mathfrak{x}_p + \Gamma_{12}^2(p, 0)\,\mathfrak{x}_q + M(p, 0)\,\mathfrak{n} \qquad \mathfrak{x}_q(p, 0)|_{p=0} = \mathfrak{x}_q(0, 0)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial p} = -\frac{L}{E}(p, 0)\,\mathfrak{x}_p - \frac{M}{E}(p, 0)\,\mathfrak{x}_q \qquad \mathfrak{n}(p, 0)|_{p=0} = \mathfrak{n}(0, 0),$$

und für die Vektoren $\mathfrak{x}_p(p, q)$, $\mathfrak{x}_q(p, q)$, $\mathfrak{n}(p, q)$:

$$\frac{\partial \mathfrak{x}_p}{\partial q} = \Gamma_{12}^1(p, q)\,\mathfrak{x}_p + \Gamma_{12}^2(p, q)\,\mathfrak{x}_q + M(p, q)\,\mathfrak{n} \qquad \mathfrak{x}_p(p, q)|_{q=0} = \mathfrak{x}_p(p, 0)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{x}_q}{\partial q} = \Gamma_{22}^1(p, q)\,\mathfrak{x}_p + \Gamma_{22}^2(p, q)\,\mathfrak{x}_q + N(p, q)\,\mathfrak{n} \qquad \mathfrak{x}_q(p, q)|_{q=0} = \mathfrak{x}_q(p, 0)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial q} = -\frac{M}{E}(p, q)\,\mathfrak{x}_p - \frac{N}{E}(p, q)\,\mathfrak{x}_q \qquad \mathfrak{n}(p, q)|_{q=0} = \mathfrak{n}(p, 0).$$

Daraus folgt dann wegen der sich aus der Definition von $E(p, q)$, $L(p, q)$, $M(p, q)$, $N(p, q)$ ergebenden Analytizität dieser Funktionen in $p = q = 0$ nach zweimaliger Anwendung des Satzes von KOWALEWSKI die Analytizität von $\mathfrak{x}_p(p, q)$, $\mathfrak{x}_q(p, q)$, $\mathfrak{n}(p, q)$ im Nullpunkt und damit auch die Analytizität von $\mathfrak{x}(p, q) = \mathfrak{x}(0, 0) + \int_0^{(p, q)} (\mathfrak{x}_p\,dp + \mathfrak{x}_q\,dq)$ in diesem Punkt. Weiter stimmen der Flächenstreifen $\{\mathfrak{x}(p, 0), \mathfrak{n}(p, 0)\}$ und der Streifen $\Gamma = \{\mathfrak{x}(p), \mathfrak{n}(p)\}$ sowohl in ihren Invarianten für alle Werte von $p = s$ als auch in ihren Begleitvektoren $\mathfrak{x}(p, 0)$; $\mathfrak{x}_p(p, 0)$, $\mathfrak{x}_q(p, 0)$, $\mathfrak{n}(p, 0)$ und $\mathfrak{x}(p)$, $\mathfrak{x}_p(p)$, $(\mathfrak{n}(p) \times \mathfrak{x}_p(p))$, $\mathfrak{n}(p)$ für $p = 0$ überein, sie sind also identisch, d.h. $\mathfrak{x}(p, q)$ geht für $p = s$, $q = 0$ durch Γ. Da nun unsere Fläche auch offensichtlich den Postulaten 3. und 4. genügt, so ist der Existenzbeweis hiermit erbracht. Man sieht schließlich leicht ein,

[10]) Siehe z.B. BIANCHI, L.: Lehrbuch der Differentialgeometrie, 8. Aufl., S. 92. 1899.

[11]) Mit Γ_{kl}^i sind hier die CHRISTOFFEL-Symbole zweiter Art bezeichnet.

daß $\mathfrak{x}(p, q)$ auch die einzige Fläche ist, die alle Forderungen von Satz 1 erfüllt, w. z. b. w.

Aus diesem Beweis ergibt sich, daß als Ausnahmefall im Sinne unseres Satzes gerade der Fall anzusehen ist, wo der sich nach Auflösung der Gleichung $\frac{2l_1H + l_2K + l_3}{2m_1H + m_2K + m_3} = f$ nach N ergebende Nenner im Nullpunkt verschwindet; eine Tatsache, welche mit dem Bestehen der Relation

$$(l_1 - m_1 f(0,0)) - b(0)\,(l_2 - m_2 f(0,0)) = 0$$

zwischen den vorgegebenen Größen b und f gleichwertig ist (wir mußten nämlich diesen Fall ausschließen, um den Satz von KOWALEWSKI anwenden zu können!). Es fragt sich nun, was kann in einem solchen Ausnahmefall passieren?

Nehmen wir einmal an, es gehe eine den Forderungen von Satz 1 genügende Fläche durch einen Streifen, der die Ausnahmerelation

$$(13) \qquad (l_1 - m_1 f(0,0)) - b(0)\,(l_2 - m_2 f(0,0)) = 0$$

erfüllt. Die Hauptkrümmungen $r_1(0,0)$ und $r_2(0,0)$ im Nullpunkt dieser Fläche sind dann ein Lösungssystem ihrer natürlichen Gleichung im Nullpunkt

$$\frac{2l_1H(0,0) + l_2K(0,0) + l_3}{2m_1H(0,0) + m_2K(0,0) + m_3} = f(0,0)$$

oder

$$(14) \qquad \begin{cases} \lambda_1(r_1(0,0) + r_2(0,0)) + \lambda_2 r_1(0,0)\, r_2(0,0) + \lambda_3 = 0 \\ (\lambda_i = l_i - m_i f(0,0);\ i = 1, 2, 3) \end{cases}$$

und der aus der EULERschen Formel folgenden Ungleichung:

$$(15) \qquad \operatorname{Min}(r_1(0,0), r_2(0,0)) \leqq -b(0) \leqq \operatorname{Max}(r_1(0,0), r_2(0,0)),$$

wobei sich $b(0)$ aus der Ausnahmerelation zu $b(0) = \lambda_1/\lambda_2$ bestimmt[12]). Ein solches Lösungssystem kann aber wegen (14) und (15) nur dann existieren, wenn die Hyperbel $r_2 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_2}}{r_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$ mit den Asymptoten $r_1 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, $r_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ durch eine monoton wachsende Funktion $r_2 = r_2(r_1)$ dargestellt wird, bzw. wenn sie in das Geradenpaar $r_1 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, $r_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ zerfällt. Wenn nun $\frac{dr_2}{dr_1} < 0$, d.h. $\lambda_1^2 - \lambda_2\lambda_3 > 0$ ist, so gibt es also gar keine durch unseren Ausnahmestreifen gehende Fläche, während im Falle $\lambda_1^2 - \lambda_2\lambda_3 \leqq 0$ die Verhältnisse sehr verschiedenartig sein können. So gehen z. B. durch einen ebenen, geradlinigen Asymptotenstreifen unendlich viele und durch einen nichtebenen

[12]) Hierbei ist $\lambda_2 \neq 0$, sonst wäre nämlich wegen (13) und (14) $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_3 = 0$, d.h. $\operatorname{Rand}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} < 2$ gegen Voraussetzung (vgl. S. 249 dieser Arbeit!).

Asymptotenstreifen keine Torsen, d.h. Flächen mit der natürlichen Gleichung $K=0$. Hiermit haben wir die folgende Verschärfung von Satz 1 bewiesen.

Satz 1'. *Der einzige der in Satz 1 in Rede stehenden Ausnahmefälle ist der Fall, wo die vorgegebenen Größen $f(p,q)$ und l' der Relation $(l_1 - m_1 f(0,0))\, b(0)\, (l_2 - m_2 f(0,0)) = 0$ genügen. Ist hierbei*

$$(l_1 - m_1 f(0,0))^2 - (l_2 - m_2 f(0,0))\,(l_3 - m_3 f(0,0)) > 0,$$

so gibt es keine Fläche der in Satz 1 geforderten Art, während im gegenteiligen Fall $(l_1 - m_1 f(0,0))^2 - (l_2 - m_2 f(0,0))\,(l_3 - m_3 f(0,0)) \leq 0$ keine oder auch mehrere solcher Flächen existieren können.

Hieraus folgt unter anderem, daß Satz 1 im Falle der natürlichen Gleichung $H = f$ ausnahmslos gilt. Weiter ergibt sich, daß im Falle der natürlichen Gleichung $\frac{2H}{K} = f$ keine Fläche durch den entsprechenden Ausnahmestreifen geht.

Der Spezialfall $H = f$ von Satz 1 wurde schon von Rellich[13]) bewiesen, allerdings bezog Rellich die isothermen Parameter in einer etwas anderen Weise als wir auf die Streifenkurve.

Korollar zu Satz 1. *Durch jeden in $s=0$ analytischen Streifen $\{\mathfrak{x}(s), \mathfrak{n}(s)\}$ geht im allgemeinen genau eine in $u=v=0$ analytische Fläche $\mathfrak{x}(u,v)$ mit $\mathfrak{x}(0,0)=\mathfrak{x}(0)$ und $\frac{2l_1 H(u,v) + l_2 K(u,v) + l_3}{2m_1 H(u,v) + m_2 K(u,v) + m_3} = d = \text{const.}$*

Beweis. Nach Satz 1 ist die Existenz einer Fläche mit den angegebenen Eigenschaften trivial. Wir nehmen also an, daß zwei derartige Flächen $\mathfrak{x}_1(u,v)$ und $\mathfrak{x}_2(u,v)$ durch den Streifen $\{\mathfrak{x}(s), \mathfrak{n}(s)\}$ gehen. Wegen

$$(\mathfrak{x}_1)_u(0,0) \times (\mathfrak{x}_1)_v(0,0) \neq 0$$

gilt nun für ein Komponentenpaar $x_{i_1}^{(1)}$, $x_{i_2}^{(1)}$ von $\mathfrak{x}_1$:

$$\frac{\partial(x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(1)})}{\partial(u,v)}(0,0) \neq 0.$$

Die Umkehrfunktionen der Funktionen $x_{i_1}^{(1)}(u,v)$, $x_{i_2}^{(1)}(u,v)$ sind also im Punkt $(x_{i_1}^1(0), x_{i_2}^1(0))$ analytisch, woraus die Analytizität der Parameterdarstellung $u = u(s) = u(x_{i_1}^1(s), x_{i_2}^1(s))$, $v = v(s) = v(x_{i_1}^{(1)}(s), x_{i_2}^{(1)}(s))$ der Streifenkurve C auf der Fläche $\mathfrak{x}_1$ im Punkt $s=0$ folgt. Dasselbe ist auch für die Fläche $\mathfrak{x}_2$ der Fall, C liegt also in analytischer Weise (vgl. S. 245) auf $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$. Jetzt können wir aber auf $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ nach unserem Lemma auf C bezogene, isotherme Parameter (p,q) einführen. Dann gilt für beide Flächen: $\frac{2l_1 H(p,q) + l_2 K(p,q) + l_3}{2m_1 H(p,q) + m_2 K(p,q) + m_3} = d$; sie sind also nach Satz 1 (im allgemeinen) identisch, w. z. b. w.

Dieses Korollar ist eine Verallgemeinerung des bekannten Satzes, daß durch einen analytischen Streifen stets genau eine analytische Minimalfläche geht.

[13]) Rellich: a. a. O.[3]), S. 627.

Es sollen noch zwei Bemerkungen zu Satz 1 angeführt werden:

1. Wir hatten beim Beweis von Satz 1 von der natürlichen Gleichung: Krümmungsfunktion $\Phi(E, L, M, N) =$ vorgeschriebene Funktion f nur benutzt, daß diese sich eindeutig nach dem Koeffizienten N der zweiten Grundform auflösen ließ. Satz 1 gilt also nicht nur im Falle, daß Φ speziell eine linear gebrochene Funktion von H und K ist, sondern in genau derselben Weise auch in allen denjenigen Fällen, wo sich die Gleichung $\Phi(E, L, M, N) = f$ eindeutig nach N auflösen läßt. Wie man leicht durch Nachrechnen bestätigt, trifft dies z. B. für $\Phi = r_1$ zu, wenn wir durch die Zusatzbedingung $f(0, 0) + b(0) \neq 0$ das Auftreten eines Nabelpunktes im Nullpunkt der Fläche ausschließen. r_1 ist dabei die größere oder kleinere der beiden Hauptkrümmungen, je nachdem $f(0, 0) + b(0)$ positiv oder negativ ist.

2. Die Frage, ob in Satz 1 überall die Voraussetzung der Analytizität durch die schwächere Voraussetzung der (hinreichend oft möglichen) Differenzierbarkeit ersetzt werden kann, läßt sich mit den von uns angewandten Methoden nicht beantworten. Es fehlen nämlich Sätze allgemeiner Art, welche über die Lösbarkeit des Gleichungssystems (12), in welchem eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vom elliptischen Typ enthalten ist, unter Differenzierbarkeitsvoraussetzungen Aufschluß geben könnten.

§ 4. Natürliche Gleichungen einer Fläche in normierten sphärisch-isothermen Parametern.

Ziel dieses Paragraphen ist, zu zeigen, daß an Stelle von normierten isothermen Parametern genau so gut auch normierte sphärisch-isotherme Parameter der Bildung von natürlichen Gleichungen einer Fläche zugrunde gelegt werden können. Wir beweisen nämlich den Satz 1 vollkommen entsprechenden

Satz 2. *Ist Γ ein durch $\{\mathfrak{x}(s), \mathfrak{n}(s)\}$ ($s =$ Bogenlänge) gegebener, in $s = 0$ analytischer Streifen und $f(p, q)$ irgendeine in $p = q = 0$ analytische Funktion, so gibt es, abgesehen von den Fällen, wo zwischen den vorgegebenen Größen Γ und f die Relationen $a^2(0) + b^2(0) = 0$, $\lambda_1 - \lambda_2 b(0) = 0$, $\lambda_1(a^2(0) + b^2(0)) - \lambda_3 b(0) = 0$ bestehen*[14]*, in der Umgebung von $p = q = 0$ eine und nur eine Fläche $\mathfrak{x}(p, q)$, die folgenden Bedingungen genügt:*

1. *$\mathfrak{x}(p, q)$ ist in $p = q = 0$ analytisch.*
2. *Die Fläche geht für $p = s$, $q = 0$ durch den Streifen Γ.*
3. *(p, q) sind sphärisch-isotherme Parameter der Fläche.*
4. $\dfrac{2l_1 H(p, q) + l_2 K(p, q) + l_3}{2m_1 H(p, q) + m_2 K(p, q) + m_3} = f(p, q)$.

Beweis. Es erweist sich als zweckmäßig, zunächst die Existenz und Eindeutigkeit des sphärischen Bildes $\mathfrak{n}(p, q)$ der gesuchten Fläche $\mathfrak{x}(p, q)$ nachzuweisen. Dieses sphärische Bild bestimmt sich in eindeutiger Weise nach Satz 1 als diejenige lokal analytische Fläche in isothermen Parametern

[14]) Die Größen λ_1, λ_2, λ_3 sind im Hinblick auf die vierte Bedingung dieses Satzes genau so wie auf S. 252 dieser Arbeit definiert.

$p, q)$, welche für $p = s$, $q = 0$ durch den Streifen $\Gamma' = \{\mathfrak{n}(s), \varepsilon\,\mathfrak{n}(s)\}$ $\left(\varepsilon = \text{sign}\ \frac{\lambda_2 b(0) - \lambda_1}{\lambda_1(a^2(0) + b^2(0)) - \lambda_3 b(0)}\right)$[15]) geht und deren Gausssche Krümmung den konstanten Wert 1 besitzt. [Daß in diesem Fall s nicht die Bogenlänge der Streifenkurve ist, sondern wegen $(\mathfrak{n}'(0))^2 = a^2(0) + b^2(0) \neq 0$ nur ein gewisser Parameter von ihr, tut nämlich der Gültigkeit von Satz 1 keinen Abbruch]. Der Koeffizient $e(p, q)$ der ersten Grundform $e(dp^2 + dq^2)$ der so bestimmten Fläche ist hierbei die Lösung der Differentialgleichung:

$$e_{qq} = -2e^2 + \frac{e_p^2}{e} + \frac{e_q^2}{e} - e_{pp}$$

unter den Anfangsbedingungen:

$$e(p, 0) = a^2(p) + b^2(p), \quad e_q(p, 0) = -2^+ \sqrt{(a^2(p) + b^2(p))^3} \cdot c'(p)$$

(c' ist die geodätische Krümmung von Γ'),

während sich die zweite Grundform zu $-\varepsilon\, e(dp^2 + dq^2)$ ergibt, woraus sofort folgt, daß unsere Fläche tatsächlich eine Einheitskugel ist.

Nun gelten aber für die gesuchte Fläche $\mathfrak{x}(p, q)$ und ihr sphärisches Bild $\mathfrak{n}(p, q)$ die beiden Differentialgleichungen

(16) $$\mathfrak{x}_p = -\frac{L}{e}\mathfrak{n}_p - \frac{M}{e}\mathfrak{n}_q, \qquad \mathfrak{x}_q = -\frac{M}{e}\mathfrak{n}_p - \frac{N}{e}\mathfrak{n}_q$$

mit den durch Gleichsetzung von $\frac{\partial \mathfrak{x}_p}{\partial q}$ und $\frac{\partial \mathfrak{x}_q}{\partial p}$ folgenden Integrabilitätsbedingungen:

(17) $$\begin{cases} L_q = \frac{e_q}{2e}(L + N) + M_p \\ M_q = -\frac{e_p}{2e}(L + N) + N_p. \end{cases}$$

Aus (16) folgt: $E = \mathfrak{x}_p^2 = \frac{L^2 + M^2}{e}$, $F = \mathfrak{x}_p \mathfrak{x}_q = \frac{LM + MN}{e}$, $G = \mathfrak{x}_q^2 = \frac{M^2 + N^2}{e}$, woraus sich dann $2H = \frac{e(L + N)}{LN - M^2}$, $K = \frac{e^2}{LN - M^2}$ berechnet. Die vierte Bedingung von Satz 2 läßt sich jetzt in der Form

$$\frac{l_1 e(L + N) + l_2 e^2 + l_3(LN - M^2)}{m_1 e(L + N) + m_2 e^2 + m_3(LN - M^2)} = f$$

oder

(18) $$N = \frac{\varphi_1(f, e, L, M)}{\varphi_2(f, e, L)} = \frac{-(l_1 - m_1 f) e L - (l_2 - m_2 f) e^2 + (l_3 - m_3 f) M^2}{(l_1 - m_1 f) e + (l_3 - m_3 f) L}$$

schreiben, während sich aus der zweiten Bedingung dieses Satzes und (16) die Beziehungen

(19) $$\begin{cases} L(p, 0) = -\mathfrak{x}_p(p)\,\mathfrak{n}_p(p, 0) = b(p) \quad \text{und} \\ M(p, 0) = -\mathfrak{x}_p(p)\,\mathfrak{n}_q(p, 0) = -\varepsilon a(p) \end{cases}$$

[15]) Wir wählen hier ε von vorneherein so, daß es das Vorzeichen der Krümmung der gesuchten Fläche im Nullpunkt wird.

ergeben. Wir können nun ganz analog wie beim Beweis von Satz 1 wegen $\varphi_2(f(0,0), e(0,0), L(0,0)) = \lambda_1(a^2(0)+b^2(0)) - \lambda_3 b(0) \neq 0$ aus der Analytizität der vorgegebenen Größen Γ und f sowie der Analytizität der schon bestimmten Funktion $e(p,q)$ im Nullpunkt auf die eindeutige analytische Lösbarkeit der Gln. (17) und (18) mit den Anfangsbedingungen (19) in der Umgebung des Punkts $p=q=0$ schließen. Dann berechnet sich aber $\mathfrak{x}(p,q)$ mittels der nun bekannten Funktionen $\mathfrak{n}(p,q)$, $L(p,q)$, $M(p,q)$, $N(p,q)$ nach (16) zu $\mathfrak{x}(p,q) = \mathfrak{x}(0) - \int_0^{(p,q)} \left[\left(\frac{L}{e}\mathfrak{n}_p + \frac{M}{e}\mathfrak{n}_q\right)dp + \left(\frac{M}{e}\mathfrak{n}_p + \frac{N}{e}\mathfrak{n}_q\right)dq\right]$. Durch diese Funktion wird dabei wirklich eine in $p=q=0$ analytische Fläche dargestellt, deren Normalenvektor gerade $\mathfrak{n}(p,q)$ ist; es gilt nämlich: $\mathfrak{x}_p\,\mathfrak{n} = -\left(\frac{L}{e}\mathfrak{n}_p + \frac{M}{e}\mathfrak{n}_q\right)\mathfrak{n} = 0$ und

$$\mathfrak{x}_q\,\mathfrak{n} = -\left(\frac{M}{e}\mathfrak{n}_p + \frac{N}{e}\mathfrak{n}_q\right)\mathfrak{n} = 0 \quad \text{sowie}$$

$$(\mathfrak{x}_p, \mathfrak{x}_q, \mathfrak{n})(0,0) = \frac{L(0,0)\,N(0,0) - (M(0,0))^2}{(e(0,0))^2}(\mathfrak{n}_p, \mathfrak{n}_q, \mathfrak{n})(0,0)$$

$$= \varepsilon\frac{L(0,0)\,N(0,0) - (M(0,0))^2}{e(0,0)} = \varepsilon\frac{(\lambda_2 b(0) - \lambda_1)(a^2(0)+b^2(0))}{\lambda_1(a^2(0)+b^2(0)) - \lambda_3 b(0)} > 0.$$

Offensichtlich genügt $\mathfrak{x}(p,q)$ allen vier Bedingungen von Satz 2, schließlich erkennen wir aber auch leicht, daß $\mathfrak{x}(p,q)$ die einzige derartige Fläche ist. Zwei solcher Flächen würden nämlich zunächst in ihren sphärischen Bildern, damit aber auch nach (17), (18), (19) in den Funktionen L, M, N, also wegen (16) selbst übereinstimmen, w. z. b. w.

Die am Schluß von § 3 angeführten Bemerkungen treffen in derselben Weise auch für Satz 2 zu, insbesondere betonen wir, daß Satz 2 wiederum für alle diejenigen Krümmungsinvarianten Φ gilt, bei denen sich die natürliche Gleichung $\Phi(e, L, M, N) = f$ [16]) eindeutig nach N auflösen läßt. Auch können wir durch eine analoge Überlegung wie diejenige in § 3 den Schluß ziehen, daß in dem Ausnahmefall $\lambda_1(a^2(0)+b^2(0)) - \lambda_3 b(0) = 0$ sicher dann keine unseren Bedingungen genügende Fläche existiert, wenn die Größen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ noch die Relation $\lambda_1^2 - \lambda_2\lambda_3 > 0$ erfüllen. [Wir brauchen bei dieser Überlegung nur die erste Grundform durch die dritte Grundform und $r_1(0,0)$ und $r_2(0,0)$ durch $\frac{1}{r_1(0,0)}$ und $\frac{1}{r_2(0,0)}$ zu ersetzen!]

§ 5. Natürliche Gleichungen einer Fläche in normierten affin-isothermen Parametern.

Bei der Untersuchung, ob ein dem Satz 1 analoger Satz auch unter Verwendung von normierten affin-isothermen Parametern existiert, werden wir in derselben Weise wie beim Beweis von Satz 1 auf die Integrabilitätsbedingungen in affin-isothermen Parametern ($N = \varepsilon L$, $M = 0$, wobei $\varepsilon = \pm 1$):

[16]) Es ist zu beachten, daß ein Unterschied zwischen dieser Bedingung und der entsprechenden Bedingung am Ende von § 3 insofern besteht, als hier Φ als Funktion der zweiten und dritten Grundform und dort als Funktion der ersten und zweiten Grundform auftritt.

$$
(20)\quad \begin{cases} E_{qq} - 2F_{pq} + G_{pp} + \frac{W_q}{W}(F_p - E_q) + \frac{W_p}{W}(F_q - G_p) + \frac{1}{2W^2}\begin{vmatrix} E & E_p & E_q \\ F & F_p & F_q \\ G & G_p & G_q \end{vmatrix} + \\ \quad + 2\varepsilon L^2 = 0 \\ \qquad\qquad (W = \sqrt{EG - F^2}) \qquad \text{(Theorema egregium)} \\ 2\varepsilon W^2 L_p + (\varepsilon E + G)(F_q - G_p)L - (FG_q - GF_q)L - \varepsilon(EF_q - FE_q)L = 0 \\ 2W^2 L_q + (\varepsilon E + G)(F_p - E_q)L + (FG_p - GF_p)L + \varepsilon(EF_p - FE_p)L = 0 \\ \qquad \text{(Gleichungen von MAINARDI-CODAZZI),} \end{cases}
$$

auf die natürliche Gleichung:

$$
(21)\quad \frac{l_1(\varepsilon E + G)L + \varepsilon l_2 L^2 + l_3(EG - F^2)}{m_1(\varepsilon E + G)L + \varepsilon m_2 L^2 + m_3(EG - F^2)} = f
$$

sowie auf die Anfangsbedingungen:

$$
(22)\quad E(p,0) = 1;\ \frac{FL}{W}\Big|_{q=0} = -a(p);\ L|_{q=0} = -b(p);\ \frac{E_q - 2F_p}{2W}\Big|_{q=0} = -c(p)
$$

geführt. Wenn wir zeigen können, daß die Gln. (20), (21) und (22) in den Unbekannten E, F, G, L unter Voraussetzung der lokalen Analytizität von f und Γ bis auf Ausnahmen in der Umgebung von $p = q = 0$ eindeutig in analytischer Weise lösbar sind, so haben wir damit auch schon bewiesen, daß es im allgemeinen eine und nur eine Fläche $\mathfrak{x}(p,q)$ in affin-isothermen Parametern gibt, die den Bedingungen 1., 2. und 4. von Satz 1 genügt. Dieser Nachweis gelingt nun in der Tat, und zwar folgendermaßen:

Wir lösen zunächst (21) nach G auf und setzen das Resultat

$$
(23)\quad \begin{cases} G = \varphi(f, E, F, L) = \dfrac{\varphi_1(f, E, F, L)}{\varphi_2(f, E, L)} \\ \qquad = \dfrac{-\varepsilon(l_1 - m_1 f)EL - \varepsilon(l_2 - m_2 f)L^2 + (l_3 - m_3 f)F^2}{(l_1 - m_1 f)L + (l_3 - m_3 f)E} \end{cases}
$$

in die Integrabilitätsbedingungen (20) und die Anfangsbedingungen (22) ein. Dann erhalten wir aus den ersteren, etwas umgeformt, das Gleichungssystem:

$$
(24)\quad \begin{cases} E_{qq} = \dfrac{1}{E\varphi - F^2}\Psi_1(f_p, f_q, f_{pp}, E, E_p, E_q, E_{pp}, F, F_p, F_q, L, L_p, L_q, \varphi \\ \qquad \text{und seine ersten und zweiten partiellen Ableitungen)} - \\ \qquad\qquad - \varphi_F F_{pp} + 2F_{pq} - \varphi_L L_{pp} \\ F_q = \dfrac{1}{2L\varphi - FL\varphi_F}\Psi_2(f_p, f_q, E, E_p, E_q, F, F_p, L, L_p, L_q, \varphi \\ \qquad\qquad \text{und seine ersten partiellen Ableitungen)} \\ L_q = \dfrac{1}{E\varphi - F^2}\Psi_3(f_p, E, E_p, E_q, F, F_p, L, L_p, \varphi \\ \qquad\qquad \text{und seine ersten partiellen Ableitungen),} \end{cases}
$$

wobei Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 ganze rationale Funktionen in den angegebenen Argumenten sind, während sich aus der zweiten Gl. (22)

$$
F(p,0) = a(p) \cdot S(p)
$$

$$
\left(S(p) = \operatorname{sign} b(0) \sqrt{\frac{(l_2 - m_2 f(p,0))\, b(p) - (l_1 - m_1 f(p,0))}{(l_1 - m_1 f(p,0))(a^2(p) + b^2(p)) - (l_3 - m_3 f(p,0))\, b(p)}}\right)
$$

und

$$W(p, 0) = b(p) \cdot S(p)\ ^{17})$$

ergibt und somit aus der vierten Gl. (22) $E_q(p, 0) = 2 \frac{\partial}{\partial p} (a(p)\, S(p)) - 2b(p)\, c(p)\, S(p)$ folgt. Das Gleichungssystem (24) hat bis auf die Terme in F_{pp}, F_{pq}, L_{pp} der ersten Gleichung und die als Argumente der Funktionen Ψ_1, Ψ_2 auftretenden Größen F_q, L_q die Form eines KOWALEWSKIschen Gleichungssystems. Um es nun genau in eine solche Form zu bringen, setzen wir in diesem System nacheinander die dritte Gleichung in die erste und zweite, und die zweite Gleichung in die erste Gleichung ein. Weiter substituieren wir in dem resultierenden, (24) äquivalenten Gleichungssystem

$$(25)\quad \begin{cases} E_{qq} = \dfrac{1}{(E\varphi - F^2)^{\varrho_1}(2L\varphi - FL\varphi_F)^{\varrho_2}}\, \chi_1(f_p, f_q, f_{pp}, f_{pq}, E, E_p, E_q, E_{pp}, E_{pq}, \\ \qquad F, F_p, F_{pp}, L, L_p, L_{pp}, \varphi \text{ und seine ersten und zweiten Ableitungen}) \\ F_q = \dfrac{1}{(E\varphi - F^2)^{\varrho_3}(2L\varphi - FL\varphi_F)}\, \chi_2(f_p, f_q, E, E_p, E_q, F, F_p, L, L_p, \varphi \quad \text{und} \\ \qquad \text{seine ersten Ableitungen}) \\ L_q = \dfrac{1}{E\varphi - F^2}\, \chi_3(f_p, E, E_p, E_q, F, F_p, L, L_p, \varphi \quad \text{und} \\ \qquad \text{seine ersten Ableitungen}) \end{cases}$$

($\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ sind positive ganze Zahlen, χ_1, χ_2, χ_3 ganze rationale Funktionen)

$$F_p = U, \quad L_p = V$$

und gewinnen so die Differentialgleichungen:

$$(26)\quad \begin{cases} E_{qq} = \dfrac{1}{(E\varphi - F^2)^{\varrho_1}(2L\varphi - FL\varphi_F)^{\varrho_2}}\, \chi_1(f_p, f_q, f_{pp}, f_{pq}, E, E_p, E_q, E_{pp}, E_{pq}, \\ \qquad F, L, U, U_p, V, V_p, \varphi \text{ und seine ersten und zweiten Ableitungen}) \\ F_q = \dfrac{1}{(E\varphi - F^2)^{\varrho_3}(2L\varphi - FL\varphi_F)}\, \chi_2(f_p, f_q, E, E_p, E_q, F, L, U, V, \varphi \quad \text{und} \\ \qquad \text{seine ersten Ableitungen}) \\ L_q = \dfrac{1}{E\varphi - F^2}\, \chi_3(f_p, E, E_p, E_q, F, L, U, V, \varphi \quad \text{und} \\ \qquad \text{seine ersten Ableitungen}) \\ U_q = \dfrac{\partial}{\partial p}\left(\dfrac{\chi_2}{(E\varphi - F^2)^{\varrho_3}(2L\varphi - FL\varphi_F)}\right) = \dfrac{1}{(E\varphi - F^2)^{\varrho_3+1}(2L\varphi - FL\varphi_F)^2} \times \\ \qquad \times \chi_4(f_p, f_q, f_{pp}, f_{pq}, E, E_p, E_q, E_{pp}, E_{pq}, F, F_p, L, L_p, U, U_p, V, V_p, \varphi \\ \qquad \text{und seine ersten und zweiten Ableitungen}) \\ V_q = \dfrac{\partial}{\partial p}\left(\dfrac{\chi_3}{E\varphi - F^2}\right) = \dfrac{1}{(E\varphi - F^2)^2}\, \chi_5(f_p, f_{pp}, E, E_p, E_q, E_{pp}, E_{pq}, \\ \qquad F, F_p, L, L_p, U, U_p, V, V_p, \varphi \quad \text{und} \\ \qquad \text{seine ersten und zweiten Ableitungen}) \\ \qquad (\chi_4, \chi_5 \text{ sind wieder ganz rational!}). \end{cases}$$

[17]) Hierbei ergibt sich, daß wie in § 3 $\varepsilon = \operatorname{sign} K(0, 0) = \dfrac{\lambda_2 b(0) - \lambda_1}{\lambda_1(a^2(0) + b^2(0)) - \lambda_3 b(0)}$ zu wählen ist.

Setzen wir jetzt noch $b(0) \neq 0$, $\lambda_1 - \lambda_2 b(0) \neq 0$, $\lambda_1(a^2(0) + b^2(0)) - \lambda_3 b(0) \neq 0$, $\lambda_3 - \lambda_1 b(0) \neq 0$ voraus, so ist dieses System zusammen mit den Anfangsbedingungen

$$(27) \quad \begin{cases} E(p,0) = 1, \quad E_q(p,0) = 2\frac{\partial}{\partial p}(a(p)S(p)) - 2b(p)c(p)S(p), \\ F(p,0) = a(p)S(p), \quad L(p,0) = -b(p), \\ U(p,0) = \frac{\partial}{\partial p}(a(p)S(p)), \quad V(p,0) = -b_p(p) \end{cases}$$

wegen

$$\varphi_2(f(0,0), E(0,0), L(0,0)) = \lambda_3 - \lambda_1 b(0) \neq 0, \; E(0,0)\varphi(0,0) - \\ - (F(0,0))^2 = (b(0)S(0))^2 \neq 0,$$

$$2L(0,0)\varphi(0,0) - F(0,0)L(0,0)\varphi_F(0,0) \\ = \frac{2b^2(0)(\lambda_1(a^2(0)+b^2(0)) - \lambda_3 b(0))}{\lambda_3 - \lambda_1 b(0)} S^2(0) \neq 0$$

und der Analytizität von f und von dem Anfangsstreifen nach Kowalewski in der Umgebung von $p = q = 0$ eindeutig in analytischer Weise lösbar. Zwischen seinen Lösungen $F(p,q)$ und $U(p,q)$ sowie $L(p,q)$ und $V(p,q)$ bestehen wegen $\frac{\partial}{\partial q}(F_p - U) = 0$ und $(F_p - U)|_{q=0} = 0$ sowie wegen $\frac{\partial}{\partial q}(L_p - V) = 0$ und $(L_p - V)|_{q=0} = 0$ die Beziehungen $F_p(p,q) = U(p,q)$ und $L_p(p,q) = V(p,q)$. Die Lösungen $E(p,q)$, $F(p,q)$ und $L(p,q)$ von (26) und (27) sind also auch Lösungen von (25) und bilden deshalb zusammen mit der durch (23) definierten Funktion $G(p,q)$ ein analytisches Lösungssystem von (20), (21) und (22). Umgekehrt sieht man aber auch leicht ein, daß diese Funktionen das einzige analytische Lösungssystem der letztgenannten drei Gleichungssysteme darstellen. Wir haben hiermit folgenden Satz vollständig bewiesen:

Satz 3. *Ist Γ ein durch $\{\mathfrak{x}(s), \mathfrak{n}(s)\}$ (s = Bogenlänge) gegebener, in $s=0$ analytischer Streifen und $f(p,q)$ irgendeine in $p=q=0$ analytische Funktion, so gibt es, von den Fällen $b(0)=0$, $\lambda_1 - \lambda_2 b(0) = 0$, $\lambda_1(a^2(0)+b^2(0)) - \lambda_3 b(0) = 0$, $\lambda_3 - \lambda_1 b(0) = 0$ abgesehen, in der Umgebung von $p=q=0$ eine und nur eine Fläche $\mathfrak{x}(p,q)$, die folgenden Bedingungen genügt:*

1. *$\mathfrak{x}(p,q)$ ist in $p=q=0$ analytisch.*
2. *Die Fläche geht für $p=s$, $q=0$ durch den Streifen Γ.*
3. *(p,q) sind affin-isotherme Parameter der Fläche.*
4. $\frac{2l_1 H(p,q) + l_2 K(p,q) + l_3}{2m_1 H(p,q) + m_2 K(p,q) + m_3} = f(p,q)$.

Im Falle $\operatorname{sign} \frac{\lambda_2 b(0) - \lambda_1}{\lambda_1(a^2(0)+b^2(0)) - \lambda_3 b(0)} = \operatorname{sign} K(0,0) < 0$ können wir auf $\mathfrak{x}(p,q)$ durch die Transformation $w = p - q$, $z = p + q$ Asymptotenlinienparameter einführen und erhalten so als

Korollar zu Satz 3: *Gilt zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 3 noch* $\operatorname{sign} \frac{\lambda_2 b(0) - \lambda_1}{\lambda_1(a^2(0)+b^2(0)) - \lambda_3 b(0)} < 0$, *so gibt es, von den in Satz 3 genannten*

Ausnahmefällen abgesehen, genau eine in $w = z = 0$ analytische Fläche $\mathfrak{x}(w, z)$ in Asymptotenlinienparametern mit der natürlichen Gleichung $\frac{2l_1 H + l_2 K + l_3}{2m_1 H + m_2 K + m_3} = f$, *welche für $w = z = s$ durch Γ geht.*

Der Spezialfall $K = f$ dieses Korollars wurde schon von RELLICH[18]) bewiesen. Unsere zweite Bemerkung von § 3 gilt übrigens auch unverändert für Satz 3; weiter zeigt sich, daß bei diesem Satz an die Stelle der linear gebrochenen Funktion von H und K auch eine Hauptkrümmung r_1 der Fläche treten kann.

§ 6. Bestimmung einer Fläche durch eine Krümmungsfunktion und eine relative Grundform.

Bis jetzt haben wir eine lokal analytische Fläche im euklidischen Raum durch eine gewisse Krümmungsfunktion Φ als Funktion spezieller Parameter (p, q) und einen Anfangsstreifen charakterisiert. Will man sich nun aber zur Bestimmung einer solchen Fläche auf allgemeine Flächenparameter (u, v) beziehen, so reicht die Vorgabe von $\Phi(u, v)$ allein nicht mehr aus. Eine Fläche ist nämlich durch drei Funktionen der Parameter (u, v) gegeben. Wir müssen also zur Charakterisierung unserer Fläche noch zwei weitere Funktionen von (u, v) heranziehen. Wir geben uns dazu etwa die von SCHERRER zu demselben Zweck eingeführte, aus der Grundform $A(u, v)\,du^2 + 2B(u, v)\,du\,dv + C(u, v)\,dv^2$ der Fläche hergeleitete „relative Grundform":

$$\frac{A(u, v)}{\sqrt[+]{|Q(u, v)|}}\,du^2 + \frac{2B(u, v)}{\sqrt[+]{|Q(u, v)|}}\,du\,dv + \frac{C(u, v)}{\sqrt[+]{|Q(u, v)|}}\,dv^2 \quad (Q = AC - B!)$$

vor, deren Koeffizienten durch die Beziehung $\frac{A}{\sqrt[+]{|Q|}} \cdot \frac{C}{\sqrt[+]{|Q|}} - \left(\frac{B}{\sqrt[+]{|Q|}}\right)^2 =$ sign $Q(0, 0)$ normiert sind und deshalb nur von zwei unabhängigen Funktionen von (u, v) abhängen. Dann können wir das Resultat SCHERRERS[19]), daß eine lokal analytische Fläche durch die (beliebig mögliche) Vorgabe eines Streifens sowie von H und der relativen ersten Grundform bzw. von K und der relativen zweiten Grundform bzw. von $\frac{2H}{K}$ und der relativen dritten Grundform eindeutig bestimmt ist, folgendermaßen verallgemeinern:

Satz 4. *Ist Γ ein durch $\{\mathfrak{x}(t), \mathfrak{n}(t)\}$ $(\mathfrak{x}'(0) \neq 0)$ gegebener, in $t = 0$ analytischer Streifen; sind weiter $f(u, v)$ sowie $\alpha(u, v)$, $\beta(u, v)$, $\gamma(u, v)$ in $u = v = 0$ analytische Funktionen mit $\alpha\gamma - \beta^2 = \varepsilon$ ($\varepsilon = 1$ im Falle der relativen ersten und relativen dritten Grundform bzw. $\varepsilon =$ sign $\frac{\lambda_2 b(0) - \lambda_1}{\lambda_1 (a^2(0) + b^2(0)) - \lambda_3 b(0)}$ im Falle der relativen zweiten Grundform), und sind endlich $u(t)$, $v(t)$ zwei in $t = 0$ analytische Funktionen mit $u(0) = 0$, $v(0) = 0$, $(u'(0))^2 + (v'(0))^2 \neq 0$ und $\alpha(0, 0)\,(u'(0))^2 + 2\beta(0, 0)\,u'(0)\,v'(0) + \gamma(0, 0)\,(v'(0))^2 > 0$ (im Falle der relativen ersten und*

[18]) RELLICH: a. a. O.[3]).

[19]) SCHERRER: a. a. O.[4]), vgl. dazu auch W. SÜSS, Bestimmung einer Fläche durch die dritte Grundform und die Summe der Hauptkrümmungsradien, Arch. Math. **2**, 103—104 (1949). SCHERRER spricht übrigens von einer Hauptform anstatt einer Grundform und entsprechend von einer relativen Hauptform.

relativen dritten Grundform) *bzw.* $\gtrless 0$ (*im Falle der relativen zweiten Grundform, je nachdem* sign $b(0) = \mp 1$ *ist*)[20]), *so gibt es in der Umgebung von* $u = v = 0$ *im allgemeinen genau eine Fläche* $\mathfrak{x}(u, v)$, *die folgenden Bedingungen genügt:*

1. $\mathfrak{x}(u, v)$ *ist in* $u = v = 0$ *analytisch.*

2. *Die Fläche geht für* $u = u(t)$, $v = v(t)$ *durch* Γ.

3. *Die Koeffizienten der relativen ersten bzw. relativen zweiten bzw. relativen dritten Grundform der Fläche stimmen mit* α, β, γ *überein.*

4. $\dfrac{2l_1 H(u, v) + l_2 K(u, v) + l_3}{2m_1 H(u, v) + m_2 K(u, v) + m_3} = f(u, v)$[21]).

Beweis. Man sieht leicht durch Einschaltung einer geeigneten Parametertransformation, daß es genügt, diesen Satz für den Spezialfall $u(t) = t = s$, $v(t) = 0$ ($s =$ Bogenlänge von $\mathfrak{x}(t)$!) zu beweisen. Um nun diesen Nachweis zu führen, beachten wir, daß es zwei in $u = v = 0$ analytische Funktionen $p(u, v)$ und $q(u, v)$ mit $p(u, 0) = u$, $q(u, 0) = 0$ gibt, die dem Gleichungssystem

$$\text{(28)} \qquad \begin{cases} q_u = \varepsilon\eta(\beta p_u - \alpha p_v) \\ q_v = \varepsilon\eta(\gamma p_u - \beta p_v) \end{cases} \qquad (\eta = \operatorname{sign}\lambda(0, 0))$$

bzw. dessen Umkehrung

$$\text{(29)} \qquad \begin{cases} p_u = \eta(-\beta q_u + \alpha q_v) \\ p_v = \eta(-\gamma q_u + \beta q_v) \end{cases}$$

genügen und wegen $\dfrac{\partial(p, q)}{\partial(u, v)}(0, 0) = \dfrac{1}{|\alpha(0, 0)|} > 0$ eine Parametertransformation definieren (vgl. § 2!). Mittels dieser Funktionen bilden wir die in $p = q = 0$ analytische Funktion $h(p, q) = f(u(p, q), v(p, q))$. Dann existiert nach Satz 1 bzw. Satz 3 bzw. Satz 2 in der Umgebung von $p = q = 0$ im allgemeinen genau eine lokal analytische Fläche $\mathfrak{X}(p, q)$ in isothermen bzw. affin-isothermen bzw. sphärisch-isothermen Parametern (p, q), welche für $p = s$, $q = 0$ durch Γ geht und bei der eine linear gebrochene Funktion von $H(p, q)$ und $K(p, q)$ gleich $h(p, q)$ ist. Transformieren wir jetzt $\mathfrak{X}(p, q)$ auf unsere ursprünglichen Parameter (u, v) so erhalten wir in $\mathfrak{x}(u, v) = \mathfrak{X}(p(u, v), q(u, v))$ eine Parameterdarstellung unserer Fläche, bei welcher diese für $u = s$, $v = 0$ durch Γ geht und die Gleichung $\dfrac{2l_1 H(u, v) + l_2 K(u, v) + l_3}{2m_1 H(u, v) + m_2 K(u, v) + m_3} = f(u, v)$ befriedigt. Sei nun $A(u, v)\,du^2 + 2B(u, v)\,du\,dv + C(u, v)\,dv^2$ die erste bzw. zweite bzw. dritte Grundform von $\mathfrak{x}(u, v)$. Da diese Differentialform durch die Parametertransformation $p = p(u, v)$, $q = q(u, v)$ in die isotherme Form gebracht wird, können wir nach dem zum Beweis unseres Lemmas in § 2 Gesagten auf die

[20]) Wir schließen nämlich bei Vorgabe der relativen zweiten Grundform die Fälle $b(0) = 0$, $\lambda_2 b(0) - \lambda_1 = 0$ und $\lambda_1(a^2(0) + b^2(0)) - \lambda_3 b(0) = 0$ aus. Die Definition der Größen λ_1, λ_2, λ_3 bezieht sich dabei auf die vierte Bedingung dieses Satzes und ist dieselbe wie auf S. 252 dieser Arbeit.

[21]) An die Stelle dieser Bedingung kann bei Vorgabe der relativen ersten bzw. relativen dritten Grundform auch die allgemeinere Bedingung $\Phi = f$ mit einer nach den Bemerkungen von Satz 1 bzw. Satz 2 zulässigen Krümmungsfunktion Φ treten.

Gültigkeit der dortigen Gln. (2) und (3) für die Funktionen $p(u, v)$ und $q(u, v)$ schließen[22]). Die Subtraktion von (28) und (29) von (2) und (3) liefert jetzt:

$$\varepsilon\eta\left(\frac{B}{\sqrt[+]{|\mathfrak{Q}|}}-\beta\right)p_u-\varepsilon\eta\left(\frac{A}{\sqrt[+]{|\mathfrak{Q}|}}-\alpha\right)p_v=0$$
$$\eta\left(\frac{B}{\sqrt[+]{|\mathfrak{Q}|}}-\beta\right)q_u-\eta\left(\frac{A}{\sqrt[+]{|\mathfrak{Q}|}}-\alpha\right)q_v=0$$

und

$$\varepsilon\eta\left(\frac{C}{\sqrt[+]{|\mathfrak{Q}|}}-\gamma\right)p_u-\varepsilon\eta\left(\frac{B}{\sqrt[+]{|\mathfrak{Q}|}}-\beta\right)p_v=0$$
$$\eta\left(\frac{C}{\sqrt[+]{|\mathfrak{Q}|}}-\gamma\right)q_u-\eta\left(\frac{B}{\sqrt[+]{|\mathfrak{Q}|}}-\beta\right)q_v=0,$$

woraus wegen $\begin{vmatrix} p_u & p_v \\ q_u & q_v \end{vmatrix}(0,0)\neq 0$ $\frac{A}{\sqrt[+]{|\mathfrak{Q}|}}=\alpha$, $\frac{B}{\sqrt[+]{|\mathfrak{Q}|}}=\beta$ und $\frac{C}{\sqrt[+]{|\mathfrak{Q}|}}=\gamma$ folgt. (Die Größen ε und η haben hier nämlich gemäß ihrer Definition denselben Wert wie diejenigen in § 2!). Unsere (in $u=v=0$ analytische) Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ besitzt also $\alpha\,du^2+2\beta\,du\,dv+\gamma\,dv^2$ als relative erste bzw. relative zweite bzw. relative dritte Grundform und genügt somit allen Forderungen von Satz 4. Daß es aber auch (im allgemeinen) nur eine derartige Fläche gibt, zeigt man schließlich ebenfalls leicht durch Zurückführung auf Satz 1 bzw. Satz 3 bzw. Satz 2 nach Einführung normierter isothermer bzw. normierter affin-isothermer bzw. normierter sphärisch-isothermer Parameter[23]), w. z. b. w.

Korollar zu Satz 4. *Zwischen einer linear gebrochenen Funktion von* GAUSS*scher und mittlerer Krümmung und einer relativen Grundform besteht keinerlei Abhängigkeit.*

Bemerkungen. 1. Dieses Korollar stellt für den Spezialfall der GAUSSschen Krümmung und der relativen ersten Grundform ein gewisses Gegenstück zum GAUSSschen Theorema egregium dar, welches besagt, daß sich die GAUSSsche Krümmung aus der ersten Grundform berechnen läßt. Ebenso kann man der gleichfalls bestehenden Unabhängigkeit zwischen der mittleren Krümmung und der relativen ersten Grundform die bekannte Abhängigkeit der mittleren Krümmung und der ersten Grundform in Form zweier partieller Differentialgleichungen entgegensetzen[24]).

2. Die Fixierung der Streifenkurve in der Parameterebene bei Satz 4 ist für die Eindeutigkeit der Bestimmbarkeit einer Fläche durch Krümmungsfunktion und relative Grundform notwendig, wie folgendes Beispiel zeigt: Es seien $\mathfrak{x}_1(u, v)$ und $\mathfrak{x}_2(u, v)$ diejenigen nach Satz 4 sicher existierenden lokal analytischen Flächen in isothermen Parametern (d. h. mit der relativen ersten

[22]) An Stelle der gestrichenen Größen treten jetzt allerdings die entsprechenden ungestrichenen Größen.

[23]) Die Einführung dieser speziellen Parameter ist nämlich auf allen etwaigen Flächen wegen der Gleichheit ihrer betreffenden relativen Grundform durch dieselbe Parametertransformation möglich.

[24]) ALEXANDER, H. W.: The rôle of the mean curvature in the immersion theory of surfaces. Trans. Amer. Math. Soc. **47**, 230—253 (1940).

Grundform du^2+dv^2) mit $H_1(u,v)=H_2(u,v)=f(u,v)$ (H_1 und H_2 sind die mittleren Krümmungen von $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$!), welche für $u=s$, $v=0$ bzw. für $u=0$, $v=s$ durch denselben Streifen Γ gehen. Wären diese Flächen identisch, so hätten wir die Beziehung $\mathfrak{x}_1(u,v)\equiv\mathfrak{x}_2(-v,u)$, wie man mit Hilfe unseres Lemmas erkennt, wenn man auf $\mathfrak{x}_2$ neue isotherme Parameter $(\bar{u},\bar{v})$ mittels der Transformation $\bar{u}=v$, $\bar{v}=-u$ einführt. Dann wäre aber $H_1(u,v)\equiv H_2(-v,u)$, d.h. $f(u,v)\equiv f(-v,u)$, was im allgemeinen nicht zutrifft, da die Funktion $f(u,v)$ beliebig (analytisch) vorgegeben werden kann. Die beiden Flächen sind also im allgemeinen voneinander verschieden, obwohl sie in der relativen ersten Grundform und der mittleren Krümmung übereinstimmen und beide durch denselben Streifen gehen.

§ 7. Beweis eines Satzes von DARBOUX.

Wir können unsere beim Beweis von Satz 1 benutzte Methode auch darauf anwenden, einen einfachen, unseres Wissens in der Literatur noch nicht vorkommenden Beweis für den folgenden Satz von DARBOUX über die Abwickelbarkeit von Flächen zu geben[25]).

Es sei M^2 eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit in den Koordinaten (u,v) mit einer im Punkt $(0,0)$ analytischen RIEMANNschen *Metrik. Auf der M^2 sei durch die in $s=0$ analytischen Funktionen $u=u(s)$, $v=v(s)$, $(u(0)=0, v(0)=0)$ eine Kurve C gegeben, deren geodätische Krümmung in bezug auf die M^2 mit $c(s)$ bezeichnet werde (s ist Bogenlänge von C). Endlich sei $\mathfrak{C}$ eine durch $\mathfrak{x}(s)$ gegebene, in $s=0$ analytische Kurve des dreidimensionalen, euklidischen Raums mit der Krümmung $\varkappa(s)$ (s ist Bogenlänge von $\mathfrak{C}$). Ist dann noch die Bedingung $|\varkappa(s)|>|c(s)|$ erfüllt, so gibt es in der Umgebung von $\mathfrak{x}(0)$ genau zwei verschiedene, in $u=v=0$ analytische Flächen $\mathfrak{x}_1(u,v)$ und $\mathfrak{x}_2(u,v)$ mit $\mathfrak{x}_i(u(s),v(s))=\mathfrak{x}(s)$ $(i=1,2)$, welche beide durch Zuordnung gleicher Koordinatenpaare (u,v) isometrisch auf die M^2 abgebildet werden.*

Beweis. Es ist wegen unseres Lemmas leicht ersichtlich, daß es genügt, diesen Satz für den Spezialfall isothermer Parameter (p,q) und $p(s)=s$, $q(s)=0$ zu beweisen. In diesem Falle hat das Quadrat des Bogenelements der M^2 die Gestalt $ds^2=E(p,q)\,(dp^2+dq^2)$ mit der in $p=q=0$ analytischen Funktion $E(p,q)$ und $E(p,0)=1$, woraus sich $c(p)=-\frac{1}{2}E_q(p,0)$ berechnet. Nun können wir durch die Kurve $\mathfrak{C}$ wegen $|\varkappa(p)|=|\mathfrak{x}_{pp}(p)|>|c(p)|$ stets genau zwei verschiedene Streifen Γ_1 und Γ_2 mit dieser geodätischen Krümmung $c(p)$ legen. Wir brauchen nur deren Normalen $\mathfrak{n}_i(p)$ durch die Gleichung

$$\mathfrak{n}_i(p)\,(\mathfrak{x}_p(p)\times\mathfrak{x}_{pp}(p))=c(p)$$

zu definieren $(i=1,2)$, aus welcher sich $\mathfrak{n}_i(p)=\frac{(-1)^i}{\varkappa^2(p)}\sqrt{\varkappa^2(p)-c^2(p)}\,\mathfrak{x}_{pp}(p)+\frac{c(p)}{\varkappa^2(p)}(\mathfrak{x}_p(p)\times\mathfrak{x}_{pp}(p))$ ergibt. Wegen der lokalen Analytizität von $\mathfrak{C}$ und $E(p,q)$ bzw. wegen der hieraus folgenden Analytizität von $\varkappa^2(p)$ und $c(p)$ in $p=0$

[25]) DARBOUX, G.: Lecons sur la théorie générale des surfaces, Bd. III, S. 253ff. 1894.

sind dann auch die Streifen Γ_1 und Γ_2 lokal analytisch, ihre (ebenfalls lokal analytischen) Invarianten seien mit a_i, b_i und c_i bezeichnet ($i = 1, 2$). Wir konstruieren jetzt unsere beiden zur M^2 isometrischen Flächen, indem wir die erste unserer Integrabilitätsbedingungen in isothermen Parametern (11) nach N auflösen und das Resultat

$$N = \frac{-E((\log E)_{pp} + (\log E)_{qq}) + 2M^2}{2L} \tag{30}$$

in die beiden übrigen Gln. (11) einsetzen. Wir erhalten so ein Gleichungssystem der Form:

$$L_q = \frac{1}{E^2 L}\,\Psi_1(E, E_p, E_q, E_{pp}, E_{qq}, L, M, M_p)$$

$$M_q = \frac{1}{E^2 L^2}\,\Psi_2(E, E_p, E_q, E_{pp}, E_{pq}, E_{qq}, E_{ppp}, E_{pqq}, L, L_p, M, M_p)$$

(Ψ_1 und Ψ_2 sind ganze rationale Funktionen!)

in den Unbekannten L und M sowie in der bekannten Funktion $E(p, q)$. Dieses System können wir zusammen mit je einer der Anfangsbedingungen

$$L(p, 0) = -b_i(p), \qquad M(p, 0) = a_i(p) \qquad (i = 1, 2) \qquad \text{[vgl. (9)!]}$$

wegen $E(0, 0) = 1$ und $L(0, 0) = -b_i(0) = -(\mathfrak{n}_i)_p(0)\ \mathfrak{x}_p(0) = \mathfrak{n}_i(0)\ \mathfrak{x}_{pp}(0) = (-1)^{i+1}\sqrt{\varkappa^2(0) - c^2(0)} \neq 0$ nach dem Satz von KOWALEWSKI in der Umgebung des Nullpunkts analytisch in eindeutiger Weise lösen. Wir definieren nun mittels der so gewonnenen Lösungen $L_i(p, q)$ und $M_i(p, q)$ nach (30) die Funktionen $N_i(p, q)$ ($i = 1, 2$). Dann brauchen wir nur noch durch jeden der Streifen Γ_i genau so wie beim Beweis von Satz 1 eine Fläche $\mathfrak{x}_i(p, q)$ mit $E(dp^2 + dq^2)$ als erster und $L_i\,dp^2 + 2M_i\,dp\,dq + N_i\,dq^2$ als zweiter Grundform zu legen, um zwei in $p = q = 0$ analytische Flächen zu erhalten, welche für $p = s$, $q = 0$ durch $\mathfrak{C}$ gehen und in der angegebenen Weise auf die M^2 isometrisch abgebildet werden. Weiter erkennen wir leicht, daß es auch nicht mehr als zwei solcher Flächen geben kann. Sonst hätten nämlich sicher zwei derselben einen ganzen durch $\mathfrak{C}$ gehenden Streifen gemein und wären so, wie sich aus diesem Beweisgang ebenfalls ergibt, miteinander identisch, w. z. b. w.

Dieser Satz gilt übrigens, wie HARTMANN und WINTNER durch Angabe eines Gegenbeispiels gezeigt haben, im allgemeinen nicht, wenn nur die Differenzierbarkeit der Metrik von der M^2 vorausgesetzt wird[26]).

[26]) HARTMANN, P., u. WINTNER, A.: On the embedding problem in differential geometry. Amer. J. Math. **72**, 553—564 (1950).

Freiburg i. Br., Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 1. Juni 1952.)

Mathematische Grundlagen der höheren Geodäsie und Kartographie

Von Dr. **Robert König**, Professor an der Universität München und Dr. **K. Heinrich Weise**, Professor an der Universität Kiel.

Erster Band:

Das Erdsphäroid und seine konformen Abbildungen

Mit 109 zum Teil farbigen Abbildungen. XVIII, 522 Seiten. 1951.
DM 46.—; Ganzleinen DM 49.60

Inhaltsübersicht: Das Sphäroid. Berechnung der Krümmungsgrößen, des Meridian- und Parallelkreisbogens, der Oberfläche. Die drei komplexen Grund-Flächenvariablen A = M, B, T für eine Drehfläche, insbesondere für Sphäroid und Kugel. Zwischenstück: Konforme Abbildung zweier Ebenen. Der geometrische Zusammenhang zwischen A, B, T. Analytische Darstellungsmittel (Reihen) für den Zusammenhang zwischen A, B, T und ihren Exponentialfunktionen. Die konforme Abbildung des Sphäroids auf Ebene, Kugel und Sphäroid. Die stereographischen Abbildungen, Kegelabbildungen und die allgemeine Bogenabbildung des Sphäroids. Die Transformationen der isothermen Koordinatensysteme. Verschiedene Projektionen des Erdsphäroids auf Ebene, Kugel und Drehellipsoid. — Hilfsmittel aus der Analysis. — Schriftenverzeichnis. Übersicht über die Bezeichnungen. Sachverzeichnis.

Aus den Besprechungen: ... Zusammenfassend darf festgestellt werden, daß die hier durchgeführte streng analytische Systematik der konformen Projektionen und ihr Aufbau aus den drei Grund-Flächenvariablen und ihren Exponentialfunktionen wohl die höchste Vollendung darstellt und die noch bestehende reiche Fülle von Möglichkeiten aufzeigt. Ein zweiter wesentlicher Vorzug dieser Darstellungsweise sind die weitreichenden Entwicklungen und die exakte Prüfung der Konvergenzfrage. Zahlreiche Koeffiziententabellen erleichtern ferner die numerische Rechnung, so daß das Buch auch für den Praktiker wertvoll ist. Die von den Verfassern angestrebte Zurückführung dieses Zweiges der Geodäsie zur Mathematik eröffnet hoffnungsvolle Perspektiven, die den zweiten Teil des Werkes mit Spannung erwarten lassen.
„Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen"

... This monumental work is a „must" for anyone interested in the mathematical theory of geodesy and cartography. *„Science"*

Zweiter Band:

Die Grundprobleme der höheren Geodäsie

In Vorbereitung.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Lehrbuch der theoretischen Physik

Von **Walter Weizel**, Professor der Physik an der Universität Bonn.
In zwei Bänden.

Erster Band:

Physik der Vorgänge. Bewegung, Elektrizität, Licht, Wärme.

Mit 270 Textabbildungen. XV, 771 Seiten. 1949. DM 53.—; Ganzleinen DM 56.90

Aus den Besprechungen: ... Der Inhalt geht in vielen Punkten sehr weit über das übliche Maß der kurzgefaßten Kompendien hinaus, ohne daß ein ungebührlich großer Umfang von vornherein abschreckt. Die Darstellung ist so ausführlich, daß ein Student der mittleren Semester leicht folgen kann. Durch kurze Inhaltsangaben und eine besondere Zusammenstellung der jeweils neu eingeführten Größen wird das Durcharbeiten der einzelnen Abschnitte erleichtert. Alle Gleichungen sind im Giorgischen Maßsystem geschrieben; dadurch wird dem Elektrotechniker die Darstellungsweise vertrauter. Man darf dem Verfasser zu dieser ausgezeichneten Arbeit Glück wünschen und für das Buch eine verdiente, große Verbreitung erwarten.

„Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik"

... The book has a high standard. The presentation is clear and thorough and it follows nearly always the conventional methods of treatment. ... The book should be very useful to the advanced student.

„The Proceedings of the Physical Society"

Zweiter Band:

Struktur der Materie

Mit 194 Textabbildungen. XII, 768 Seiten. 1950.
DM 66.—; Ganzleinen DM 69.90

Aus den Besprechungen: ... Wir besitzen in dem zweibändigen Werk von Weizel eine umfassende Darlegung der theoretischen Physik, ausgezeichnet durch die ebenso exakte wie originelle Art der Darstellung.

„Archiv der Elektrischen Übertragung"

... Die theoretischen Entwicklungen sind möglichst einfach gehalten und nirgends überwuchern die formalen Entwicklungen. Es liegt hier ein Lehrbuch vor, welches bis an die aktuelle Forschung heranführt und jedem Physiker, Chemiker und Techniker empfohlen werden kann.

„Monatshefte für Mathematik"

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Diesem Heft liegt ein Prospekt des Springer-Verlages, Berlin · Göttingen · Heidelberg, bei.

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg.
Printed in Germany.